MT–08

June – Examination 2022

B.A./B.Sc. (Part III) Examination

MATHEMATICS

(Complex Analysis)

Paper : MT-08

Time : 1½ Hours] [*Maximum Marks : 47*

Note :– The question paper is divided into two Sections A and B. Section–A contains 8 Very Short Answer Type Questions. Examinees have to attempt any *four* questions. Each question is of 1¾ marks and maximum word limit may be **30** words. Section–B contains 8 Short Answer Type Questions.

Examinees will have to answer any *four* questions. Each question is of 10 marks. Examinees have to delimit each answer in maximum **200** words. Use of non-programmable scientific calculator is allowed in this paper.

निर्देश :- यह प्रश्न-पत्र दो खण्डों 'अ' और 'ब' में विभाजित है। खण्ड-अ में 8 अति लघु उत्तरात्मक प्रश्न हैं। परीक्षार्थियों को किन्हीं **चार** प्रश्नों को हल करना है। प्रत्येक प्रश्न 1¾ अंक का है और अधिकतम शब्द-सीमा **30** शब्द है। खण्ड-ब में आठ लघु उत्तर प्रकार के प्रश्न हैं। परीक्षार्थियों को किन्हीं **चार** प्रश्नों को हल करना है। प्रत्येक प्रश्न 10 अंक का है। परीक्षार्थियों को अधिकतम **200** शब्दों में प्रत्येक उत्तर परिसीमित करना है। इस प्रश्न-पत्र में नॉन-प्रोग्रामेबल साइंटीफिक कैलकुलेटर के उपयोग की अनुमति है।

Section–A

(खण्ड—अ)

Very Short Answer Type Questions

(अति लघु उत्तरीय प्रश्न)

1. (i) Show that function $f(z) = z^n$ is differentiable at every point, where $n \in \mathrm{N}$.

   प्रदर्शित कीजिए कि फलन $f(z) = z^n$ प्रत्येक बिन्दु पर अवकलनीय है, जहाँ $n \in \mathrm{N}$।

   (ii) State Cauchy's general principle of uniform convergence for sequence.

   अनुक्रमों के एकसमान अभिसरण के लिए कॉशी के सामान्य सिद्धान्त का कथन कीजिए।

   (iii) Find radius of convergence of power series :

$$\sum\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} z^n$$

घात श्रेणी $\sum\left(1+\frac{1}{n}\right)^{n^2} z^n$ की अभिसरण त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

   (iv) Write sufficient condition for a conformal mapping representation.

   अनुकोण प्रतिचित्रण के निरूपण के लिए पर्याप्त प्रतिबन्ध लिखिए।

   (v) State Cauchy's fundamental theorem.

   कॉशी के मूल प्रमेय का कथन कीजिए।

   (vi) Write Poisson's integral formula.

   प्वासों का समाकल सूत्र लिखिए।

   (vii) State Taylor's theorem.

   टेलर प्रमेय का कथन कीजिए।

   (viii) Define isolated singularities of an analytic function.

   विश्लेषिक फलन की वियुक्त विचित्रता को परिभाषित कीजिए।

Section–B

(खण्ड—ब)

Short Answer Type Questions

(लघु उत्तरीय प्रश्न)

2. Prove that a non-empty open subset S of set of complex numbers C is connected if and only if for any two points *a, b* of S there exists a polygon which entirely lies in S.

   सिद्ध कीजिए कि सम्मिश्र संख्याओं के समुच्चय C का एक अरिक्त विवृत्त उपसमुच्चय S सम्बद्ध है यदि और केवल यदि S के किन्हीं दो बिन्दुओं *a, b* के लिए *a* से *b* तक एक ऐसा बहुभुज विद्यमान है, जो पूर्णतया S में स्थित है।

3. Show that function $f(z) = u + iv$, where :

$$f(z) = \frac{x^3(1+i) - y^3(1-i)}{x^2 + y^2}, (z \neq 0), f(0) = 0$$

   is continuous at origin and satisfies Cauchy-Riemann equations at origin but $f'(z)$ is not exists at origin.

   दर्शाइए कि फलन $f(z) = u + iv$, जहाँ :

$$f(z) = \frac{x^3(1+i) - y^3(1-i)}{x^2 + y^2}, (z \neq 0), f(0) = 0$$

   मूल बिन्दु पर संतत है तथा मूल बिन्दु पर कॉशी–रीमान समीकरण सन्तुष्ट होते हैं। यद्यपि $f'(z)$ का अस्तित्व मूल बिन्दु पर नहीं है।

4. Prove that two inverse points with respect to a circle in *z*-plane are transformed in two such points in *w*-plane which are inverse points with respect to transformed circle in *w*-plane.

   सिद्ध कीजिए कि द्विरैखिक रूपान्तरण द्वारा *z*-समतल में एक वृत्त के सापेक्ष दो प्रतिलोम बिन्दु *w*-समतल में ऐसे दो बिन्दुओं पर प्रतिचित्रित होते हैं जो रूपान्तरित वृत्त के सापेक्ष प्रतिलोम बिन्दु हैं।

5. Show that if a function $f(z)$ is analytic within and on a closed contour C, then value of its derivative at any point a within C is :

$$f'(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)\,dz}{(z-a)\cdot(z-a)}$$

प्रदर्शित कीजिए कि यदि फलन $f(z)$ एक संवृत कंटूर C के अन्दर व ऊपर एक विश्लेषिक फलन हो तो C के अन्दर किसी बिन्दु a पर इसके अवकलज का मान होगा :

$$f'(a) = \frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f(z)\,dz}{(z-a)\cdot(z-a)}$$

6. State and prove maximum modulus theorem.

महत्तम मापांक प्रमेय को कथन कर सिद्ध कीजिए।

7. Prove that if function $f(z)$ has necessary isolated singularity at $z = a$, then $f(z)$ is arbitrarily neighbouring to every complex number in every deleted neighbourhood of a.

सिद्ध कीजिए कि यदि $z = a$ फलन $f(z)$ की अनिवार्य वियुक्त विचित्रता है, तो a के प्रत्येक निष्कासित प्रतिवेश में $f(z)$ स्वेच्छतया प्रत्येक सम्मिश्र संख्या के निकट हो जाता है।

8. Prove that polynomial $z^5 + z^3 + 2z + 3$ has only one zero in first quadrant of complex plane.

सिद्ध कीजिए कि बहुपद $z^5 + z^3 + 2z + 3$ का सम्मिश्र तल के प्रथम चतुर्थांश में केवल एक ही शून्य है।

9. Prove by line integral :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin \pi x}{x^2 + 2x + 5}\,dx = -\pi e^{-2\pi}$$

परिरेखा समाकलन से सिद्ध कीजिए कि :

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin \pi x}{x^2 + 2x + 5}\,dx = -\pi e^{-2\pi}$$