MT–07

June – Examination 2022

B.A./B.Sc. (Part III) Examination

MATHEMATICS

(First Paper)

(Algebra)

Paper : MT-07

Time : 1½ Hours] [*Maximum Marks : **47***

Note :– The question paper is divided into two Sections A and B. Section–A contains 8 Very Short Answer Type Questions. Examinees have to attempt any *four* questions. Each question is of 1¾ marks and maximum word limit may be **30** words. Section–B contains 8 Short Answer Type Questions. Examinees will have to answer any *four* questions. Each question is of 10 marks. Examinees have to delimit each answer in maximum **200** words. Use of non-programmable scientific calculator is allowed in this paper.

निर्देश :- प्रश्न-पत्र दो खण्डों अ और ब में विभाजित है। खण्ड-अ में 8 अति लघूत्तरात्मक प्रश्न हैं। परीक्षार्थियों को किन्हीं **चार** प्रश्नों को हल करना है। प्रत्येक प्रश्न 1¾ अंक का है और अधिकतम शब्द-सीमा **30** शब्द है। खण्ड-ब में 8 लघु उत्तरीय प्रश्न हैं। परीक्षार्थियों को किन्हीं **चार** प्रश्नों के उत्तर देने हैं। प्रत्येक प्रश्न 10 अंक का है। परीक्षार्थियों को अधिकतम **200** शब्दों में प्रत्येक उत्तर परिसीमित करना है। इस प्रश्न-पत्र में नॉन-प्रोग्रामेबल साइंटीफिक कैलकुलेटर के उपयोग की अनुमति है।

Section–A **1¾×4=7**

(Very Short Answer Type Questions)

खण्ड—अ

(अति लघु उत्तरीय प्रश्न)

1. (i) Prove that identity element in a group is unique.

   सिद्ध कीजिए कि समूह G में तत्समक अवयव अद्वितीय होता है।

   (ii) Find order of each element of group :

   $$G = \{1, 2, 3, 4; \times_5\}$$

   समूह $G = \{1, 2, 3, 4; \times_5\}$ में प्रत्येक अवयव की कोटि ज्ञात कीजिए।

(iii) If H is a subgroup of group G and $a \in$ G, then prove that :

$$(Ha)^{-1} = a^{-1}H$$

यदि H किसी समूह G का एक उपसमूह हो तथा $a \in$ G, तब सिद्ध कीजिए कि :

$$(Ha)^{-1} = a^{-1}H$$

(iv) Prove that every subgroup of an abelian group is normal subgroup.

सिद्ध कीजिए कि एक आबेली समूह का प्रत्येक उपसमूह प्रसामान्य होता है।

(v) Define characteristics of a ring.

वलय के अभिलक्षण को परिभाषित कीजिए।

(vi) Prove that every homomorphic image of a commutative ring is also commutative.

सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक क्रमविनिमेय वलय का समाकारी प्रतिबिम्ब भी क्रमविनिमेय (तुल्याकारी) होता है।

(vii) Show that set Z is not ideal of ring (Q, +, ×).

प्रदर्शित कीजिए कि समुच्चय Z, वलय (Q, +, ×) की गुणजावली नहीं है।

(viii) Define principle ideal.

मुख्य गुणजावली को परिभाषित कीजिए।

Section–B **4×10=40**

(Short Answer Type Questions)

खण्ड—ब

(लघु उत्तरीय प्रश्न)

2. If :

$$\sigma = (17263584)$$

$$\rho = \begin{pmatrix} 12345678 \\ 25438761 \end{pmatrix},$$

then prove that :

$$\rho\ \sigma\ \rho^{-1} = (\rho(1)\rho(7)\rho(2)\rho(6)\rho(3)\rho(5)\rho(8)\rho(4))$$

यदि :

$$\sigma = (17263584)$$

$$\rho = \begin{pmatrix} 12345678 \\ 25438761 \end{pmatrix},$$

तो सिद्ध कीजिए कि :

$$\rho\ \sigma\ \rho^{-1} = (\rho(1)\rho(7)\rho(2)\rho(6)\rho(3)\rho(5)\rho(8)\rho(4))$$

3. State and prove Caley theorem.

कैले प्रमेय का कथन कर सिद्ध कीजिए।

4. Define centre of a group. Prove that centre Z of any group G is normal subgroup of G.

समूह के केन्द्र को परिभाषित कीजिए। सिद्ध कीजिए कि किसी समूह G का केन्द्र Z, G का प्रसामान्य उपसमूह होता है।

5. State and prove fundamental theorem of homomorphism.

समाकारिता की मूलभूत प्रमेय का कथन कर सिद्ध कीजिए।

6. If $\oplus$ and $\odot$ operations defined on set of real numbers R, where :

$$a \oplus b = a + b + 1$$

$$a \odot b = a + b + ab$$

and $\forall\, a, b \in \text{R}$,

then prove that (R, $\oplus$, $\odot$) is a commutative ring with unity.

यदि $\oplus$ एवं $\odot$ वास्तविक संख्याओं के समुच्चय R पर परिभाषित संक्रियाएँ हैं, जहाँ :

$$a \oplus b = a + b + 1$$

$$a \odot b = a + b + ab$$

तथा $\forall\, a, b \in \text{R}$,

तब सिद्ध कीजिए कि (R, $\oplus$, $\odot$) एक इकाई अवयव सहित क्रमविनिमेय वलय है।

7. Prove that characteristic of an integral domain (D, +, **.**) is either zero or prime number.

सिद्ध कीजिए कि पूर्णांकीय प्रान्त का (D, +, **.**) अभिलक्षण शून्य अथवा एक अभाज्य संख्या होती है।

8. If V is a vector space over field F, then prove that any non-empty subset W of vector space V(F) is subspace of V(F), if and only if :

$$\forall\, u, v \in \text{W and } \forall\, a, b \in \text{F} \Rightarrow au + bv \in \text{W}$$

यदि V क्षेत्र F पर सदिश समष्टि हो, तब सिद्ध कीजिए कि इसके एक अरिक्त उपसमुच्चय W के V(F) की उपसमष्टि होने के लिए आवश्यक एवं पर्याप्त प्रतिबन्ध है कि :

$$\forall\, u, v \in \text{W तथा } \forall\, a, b \in \text{F} \Rightarrow au + bv \in \text{W}$$

9. Prove that set of non-zero vectors S = $\{v_1, v_2, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, v_n\}$ is linearly dependent, if and only if at least one vector $v_m \in$ S is linear combination of its preceding vectors, where :

$$2 \leq m \leq n$$

सिद्ध कीजिए कि किसी सदिश समष्टि V(F) में अशून्य सदिशों का समुच्चय S = $\{v_1, v_2, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots, v_n\}$ एकघाततः आश्रित होगा, यदि और केवल यदि जब कोई एक सदिश $v_m \in$ S अपने पूर्ववर्ती सदिशों का एकघात संचय हो, जहाँ :

$$2 \leq m \leq n$$