

MT-04

June – Examination 2022

B.A./B.Sc. (Part II) Examination

MATHEMATICS

Real Analysis and Metric Space

Paper : MT-04

Time : 1½ Hours]

[Maximum Marks : 47

Note :- The question paper is divided into two Sections A and B. Section-A contains 8 Very Short Answer Type Questions. Examinees have to attempt any *four* questions. Each question is of $1\frac{3}{4}$ marks and maximum word limit may be **30** words. Section-B contains 8 Short Answer Type Questions. Examinees will have to answer any *four* questions. Each question is of 10 marks. Examinees have to delimit each answer in maximum **200** words. Use of non-programmable scientific calculator is allowed in this paper.

MT-04 / 7

(1)

T-294 Turn Over

निर्देश :- यह प्रश्न-पत्र दो खण्डों 'अ' और 'ब' में विभाजित है। खण्ड-अ में 8 अति लघु उत्तरात्मक प्रश्न हैं, परीक्षार्थियों को किन्हीं चार प्रश्नों को हल करना है। प्रत्येक प्रश्न $1\frac{3}{4}$ अंक का है और अधिकतम शब्द-सीमा **30** शब्द है। खण्ड-ब में 8 लघु उत्तर प्रकार के प्रश्न हैं, परीक्षार्थियों को किन्हीं चार प्रश्नों के उत्तर देने हैं। प्रत्येक प्रश्न 10 अंक का है। परीक्षार्थियों को अधिकतम **200** शब्दों में प्रत्येक उत्तर परिसीमित करना है। इस प्रश्न-पत्र में नॉन-प्रोग्रामेबल साइंटिफिक कैलकुलेटर के उपयोग की अनुमति है।

Section-A

4×1¾=7

(खण्ड-अ)

Very Short Answer Type Questions

(अति लघु उत्तरीय प्रश्न)

1. (i) Define an Ordered Field.

कृमित क्षेत्र को परिभाषित कीजिए।

(ii) Define a Closed Set.

संवृत समुच्चय को परिभाषित कीजिए।

MT-04 / 7

(2)

T-294

(iii) Define limit point of a sequence.

अनुक्रम के सीमा बिन्दु को परिभाषित कीजिए।

(iv) Define Darboux Sum.

डारबू योग को परिभाषित कीजिए।

(v) Define Uniform Convergence of a sequence.

अनुक्रम के एकसमान अभिसरण को परिभाषित कीजिए।

(vi) Prove that a differentiable function at C is necessary continuous at this point.

सिद्ध कीजिए कि किसी बिन्दु पर अवकलनीय फलन उस बिन्दु पर आवश्यक रूप से सतत होता है।

(vii) Define Metric Space.

दूरिक समष्टि को परिभाषित कीजिए।

(viii) Define Compact Set in metric space.

दूरिक समष्टि में संहत समुच्चय को परिभाषित कीजिए।

Section-B

4×10=40

(खण्ड—ब)

Short Answer Type Questions

(लघु उत्तरीय प्रश्न)

2. Prove that the following sequence $\langle x_n \rangle$, where,

$$x_1 = \frac{1}{2} \text{ and } x_{n+1} = \frac{2x_n + 1}{3}, \forall n \in \mathbb{N} \text{ is convergent.}$$

Also find its limit.

सिद्ध कीजिए कि निम्न अनुक्रम $\langle x_n \rangle$, जहाँ, $x_1 = \frac{1}{2}$ तथा

$$x_{n+1} = \frac{2x_n + 1}{3}, \forall n \in \mathbb{N} \text{ अभिसारी है। इसकी सीमा भी ज्ञात}$$

कीजिए।

3. By Cauchy's general principle of convergence for sequences, prove that the sequence $\langle x_n \rangle$, where,

$$x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$$

is not convergent.

कोशी के अभिसरण के सामान्य सिद्धान्त से सिद्ध कीजिए कि अनुक्रम $\langle x_n \rangle$, जहाँ

$$x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n}$$

अभिसारी नहीं है।

4. State and prove Intermediate value theorem.

अन्तर्वर्ती-मान प्रमेय का कथन कर सिद्ध कीजिए।

5. If $f(x) = x$, $x \in [0, 1]$, then show that f is R-integrable on $[0, 1]$ and $\int_0^1 x dx = \frac{1}{2}$.

यदि $f(x) = x$, $x \in [0, 1]$, तो सिद्ध कीजिए कि f अन्तराल $[0, 1]$ पर R-समाकलनीय है तथा $\int_0^1 x dx = \frac{1}{2}$.

6. Show that $\langle f_n(x) = nxe^{-nx^2} \rangle$ is pointwise convergent in $[0, k]$, $k > 0$ but not uniform convergent.

प्रदर्शित कीजिए कि $\langle f_n(x) = nxe^{-nx^2} \rangle$ अन्तराल $[0, k]$, $k > 0$ में बिन्दुशः अभिसारी है किन्तु एकसमान रूप से अभिसारी नहीं।

7. Prove that :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{(n+1)(n+2)\dots(2n)}{n^n} \right]^{\frac{1}{n}} = \frac{4}{e}$$

सिद्ध कीजिए कि :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\frac{(n+1)(n+2)\dots(2n)}{n^n} \right]^{\frac{1}{n}} = \frac{4}{e}$$

8. Prove that every open sphere is an open set in a metric space.

सिद्ध कीजिए कि किसी भी दूरिक समष्टि में, प्रत्येक विवृत्त गोलक एक विवृत्त समुच्चय होता है।

9. Prove that the limit of sequence in any metric space, is unique if it exist.

सिद्ध कीजिए कि किसी दूरिक समष्टि में एक अनुक्रम की सीमा अद्वितीय होती है, यदि यह विद्यमान है।