

MT-08

June - Examination 2019

B.A./B.Sc. Pt. III Examination**Complex Analysis****Paper - MT-08****Time : 3 Hours]****[Max. Marks :- 47**

Note: The question paper is divided into three sections A, B and C. Use of non-programmable scientific calculator is allowed in this paper.

निर्देश : प्रश्न पत्र तीन खण्डों 'अ', 'ब' और 'स' में विभाजित है। इस प्रश्नपत्र में नॉन-प्रोग्रामेबल साइंटिफिक कैल्कुलेटर के उपयोग की अनुमति है।

Section - A**7 × 1 = 7**

(Very Short Answer Questions)

Note: Answer **all** questions. As per the nature of the question delimit your answer in one word, one sentence or maximum up to 30 words. Each question carries 1 mark.

खण्ड - 'अ'

(अति लघु उत्तरीय प्रश्न)

निर्देश : सभी प्रश्नों के उत्तर दीजिए। आप अपने उत्तर को प्रश्नानुसार एक शब्द, एक वाक्य या अधिकतम 30 शब्दों में परिसीमित कीजिए। प्रत्येक प्रश्न 1 अंक का है।

- 1) (i) Represent $\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}$ in cartesian form
 $\cos \frac{2\pi}{3} + i \sin \frac{2\pi}{3}$ को कार्तीय रूप में प्रदर्शित कीजिये।
- (ii) Write equation of a circle in complex number form.
 किसी वृत्त का सम्मिश्र संख्याओं के रूप समीकरण लिखिये।
- (iii) Is $e^x(\cos y + i \sin y)$ is an analytic function.
 क्या $e^x(\cos y + i \sin y)$ एव वैश्लेषिक फलन है।
- (iv) What is a conformal mopping?
 अनुकोण प्रतिचित्रण क्या है?
- (v) What are singular points?
 विचित्र बिन्दु क्या होते हैं?
- (vi) Write Cauchy - Integral formula.
 कोशी समाकल सूत्र लिखिये।
- (vii) Define a bilinear transformation.
 द्विरैखिक रूपान्तरण को परिभाषित कीजिये।

Section - B

4 × 5 = 20

(Short Answer Questions)

Note: Answer **any four** questions. Each answer should not exceed 200 words. Each question carries 5 marks.

खण्ड - ब

(लघु उत्तरीय प्रश्न)

निर्देश : किन्हीं चार प्रश्नों के उत्तर दीजिए। आप अपने उत्तर को अधिकतम 200 शब्दों में परिसीमित कीजिए। प्रत्येक प्रश्न 5 अंकों का है।

- 2) If $|z_1|$ and $|z_2|$ and $\arg z_1 + \arg z_2 = 0$ show that z_1 and z_2 are conjugation numbers.

यदि $|z_1| = |z_2|$ तथा $\arg z_1 + \arg z_2 = 0$ प्रदर्शित कीजिये कि z_1 तथा z_2 संयुग्मी संख्यायें हैं।

- 3) Show that : प्रदर्शित कीजिये।

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \equiv \frac{4\partial^2}{\partial z \partial \bar{z}}$$

- 4) Find the bilinear transformation when transforms the point

$$z = 2, 1, 0 \text{ to } w = 1, 0, i.$$

वह द्वैरेखिक रूपान्तरण ज्ञात कीजिये जो बिन्दुओं $z = 2, 1, 0$ की क्रमशः $w = 1, 0, i$ को रूपान्तरित करता है।

- 5) Evaluate : / मान ज्ञात कीजिये।

$$\int_0^{1+i} z^2 dz$$

- 6) Evaluate : / मान ज्ञात कीजिये।

$$\int_0^1 \frac{e^{3z}}{z - \pi i} dz$$

Where C is a circle $|z - 1| = 4$

जहां C एक वृत्त $|z - 1| = 4$ है।

- 7) Find the kind of singularities of $\frac{1}{\cos\left(\frac{1}{z}\right)}$ at $z = 0$

फलनों की विचित्रता की जाति ज्ञात कीजिये। $\frac{1}{\cos\left(\frac{1}{z}\right)}$ की $z = 0$ पर

8) Find residues at the poles. $\frac{z^4}{(z^2 + a^2)^4}$

फलन के अनतंक पर अवशेष ज्ञात कीजिये। $\frac{z^4}{(z^2 + a^2)^4}$

9) Prove that / सिद्ध कीजिये।

$$\int_0^{\infty} \frac{x}{\sin x} dx = \frac{\pi^2}{4}$$

Section - C

2 × 10 = 20

(Long Answer Questions)

Note: Answer **any two** questions. You have to delimit your each answer maximum up to 500 words. Each question carries 10 marks.

खण्ड - स

(दीर्घ उत्तरीय प्रश्न)

निर्देश : किन्हीं दो प्रश्नों के उत्तर दीजिए। आप अपने उत्तर को अधिकतम 500 शब्दों में परिसीमित कीजिए। प्रत्येक प्रश्न 10 अंकों का है।

10) Prove that the derivatives of an analytic function is itself an analytic function.

किसी वैश्लेषिक फलन का अवकलन एवं वैश्लेषिक फलन होता है।

11) Evaluate for a circle C, $|z| = 3$ and $t > 0$

एक वृत्त C, $|z| = 3$ तथा $t > 0$ पर मान ज्ञात कीजिये।

(i) $\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{e^{zt}}{(z^2 - 1)^2} dz$

(ii) $\frac{1}{2\pi i} \int_C \frac{e^{zt}}{(z^2 + 1)} dz$

12) State and prove Liouville's theorem and apply it to establish fundamental theorem of algebra.

लिबेली प्रमेय का कथन लिखकर सिद्ध कीजिये फिर इसके अनुप्रयोग से बीजगणित की मूल प्रमेय को सिद्ध कीजिये।

13) Prove by method of contour integration.

परिरेखा समाकलन विधि से सिद्ध कीजिये।

$$(i) \int_0^{\infty} \frac{\cos mx}{a^2 + x^2} dx = \frac{\pi}{2a} e^{-ma}$$

$$(ii) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin mx}{a^2 + x^2} dx = 0$$
