

**MT-07**

June - Examination 2019

**B.A. / B.Sc. Pt. III Examination****Algebra****Paper - MT-07****Time : 3 Hours ]****[ Max. Marks :- 47**

**Note:** The question paper is divided into three sections A, B and C. Use of non-programmable scientific calculator is allowed in this paper.

**निर्देश :** यह प्रश्न पत्र 'अ', 'ब' और 'स' तीन खण्डों में विभाजित है। इस प्रश्न पत्र में नान-प्रोग्रामेबल साइंटिफिक कैल्कुलेटर के उपयोग की अनुमति है।

**Section - A****7 × 1 = 7**

(Very Short Answer Type Questions)

**Note:** Section 'A' contains seven (07) very short answer type questions. Examinee have to attempt all questions. Each question is of 01 marks and Maximum word limit may be thirty words.

**खण्ड - 'अ'**

(अति लघुउत्तरात्मक प्रश्न)

**निर्देश :** खण्ड 'अ' में सात (07) अतिलघुउत्तरात्मक प्रश्न हैं। परीक्षार्थियों को सभी प्रश्नों को हल करना है। प्रत्येक प्रश्न को 01 अंक हैं और अधिकतम शब्द सीमा तीस शब्द हैं।

- 1) (i) Define Abelian Group.  
आबेली ग्रुप को परीभाषित कीजिये।
- (ii) Define cyclic permutations.  
चक्रीय क्रमचय को परीभाषित कीजिये।
- (iii) Define Isomorphic group.  
तुल्याकारी ग्रुप को परीभाषित कीजिये।
- (iv) Define Integral Domain.  
पूर्णाकीय प्रान्त को परीभाषित कीजिये।
- (v) Define Quotient Ring.  
विभाग वलय को परीभाषित कीजिये।
- (vi) Define vector space.  
सदिश समष्टि को परिभाषित कीजिये।
- (vii) Define Direct sum of subspaces.  
उपसमष्टियों का अनुलोम योगफल परीभाषित कीजिये।

### Section - B

$4 \times 5 = 20$

(Short Answer Type Questions)

**Note:** Section 'B' contain 08 Short Answer Type Question. Examinees will have to answer any four (04) questions. Each question is of 05 marks and maximum word limit may be 200 words.

(खण्ड - ब)

(लघु उत्तरीय प्रश्न)

**निर्देश :** खण्ड 'ब' में आठ (08) लघु उत्तर प्रकार के प्रश्न हैं, परीक्षार्थी को विन्ही चार (04) सवालो का उत्तर देना हैं। प्रत्येक प्रश्न 05 अंक का हैं और अधिकतम शब्द सीमा 200 शब्द है।

- 2) Prove that set  $\{1, -1, i, -i\}$  where  $i = \sqrt{-1}$  is a finite abelian group for multiplication of complex number.

सिद्ध कीजिए कि समुच्चय  $\{1, -1, i, -i\}$  जहाँ  $\sqrt{-1}$  सम्मिश्र संख्याओं के गुणन के लिए एक सीमित अबेलियन ग्रुप है।

- 3) Prove that every infinite cyclic group has two and only two generators.

सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक अपरिमित चक्रीय समूह के दो और केवल दो ही जनक होते हैं।

- 4) Find all the cosets of  $H = \{0, 4\}$  in the group.  $G = (Z_8, + 8)$ .

ग्रुप  $G = (Z_8, + 8)$  में  $H = \{0, 4\}$  के सभी सहसमुच्चय ज्ञात कीजिए।

- 5) Prove that if  $H$  and  $K$  are two normal subgroups of  $G$  then  $HK$  is also a normal subgroup of  $G$ .

सिद्ध कीजिए कि यदि  $H$  और  $K$  किसी समूह  $G$  के दो विशिष्ट उपसमूह हैं तो  $HK$  भी समूह  $G$  का एक विशिष्ट उपसमूह है।

- 6) Prove that every field is an integral domain but the converse is not necessarily true.

सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक क्षेत्र एक पूर्णाकीय प्रान्त है परन्तु इसका विलोम सत्य हो यह आवश्यक नहीं है।

- 7) Let  $S = \{a + b\sqrt{3} \mid a, b \in Z\}$ , then prove that  $S$  is a subring of ring.  $(R, +, \cdot)$  where  $R$  is a set of real numbers.

माना  $S = \{a + b\sqrt{3} \mid a, b \in Z\}$  तब सिद्ध करो कि  $S$  वलय  $(R, +, \cdot)$  का उपवलय है जहाँ वास्तविक संख्याओं का समुच्चय है।

- 8) Prove that if  $W_1(F)$  and  $W_2(F)$  are subspaces of the vector space  $V(F)$ , then  $(W_1 \cap W_2)(F)$  is also subspace of  $V(F)$ .

सिद्ध कीजिए कि यदि  $W_1(F)$  तथा  $W_2(F)$  सदिश समष्टि  $V(F)$  की उपसमष्टि है, तो  $(W_1 \cap W_2)(F)$  भी  $V(F)$  की उपसमष्टि है।

- 9) Show that the following vectors of  $V_3(R)$  are Linear Independent

$$U_1 = (1, 1, 0), U_2 = (1, 1, 2), U_3 = (2, 1, 3).$$

सिद्ध कीजिए की के  $V_3(R)$  निम्न सदिश एकघाततः स्वतन्त्र है :

$$U_1 = (1, 1, 0), U_2 = (1, 1, 2), U_3 = (2, 1, 3).$$

### Section - C

2 × 10 = 20

(Long Answer Type Questions)

**Note:** Section 'C' contain Four (04) Long Answer Type Questions. Examinees will have to answer any two (02) question. Each question is of 10 marks and maximum word limit may be 500 words.

### (खण्ड - स)

(दीर्घ उत्तरीय प्रश्न)

**निर्देश :** खण्ड 'स' में 4 निबन्धात्मक प्रश्न है। परीक्षार्थी को किन्ही दो (02) प्रश्नों के जवाब देने है। प्रत्येक प्रश्न 10 अंकों का हैं और अधिकतम शब्द सीमा 500 शब्द हैं।

- 10) Prove that Set  $A_n$  of all even permutation of degree  $n$  is a group of order  $\frac{1}{2}(n!)$ .

सिद्ध कीजिए कि  $n$  कोटि के सभी सम क्रमचयों का समुच्चय  $A_n$  एक समूह (ग्रुप) है जिसका समूहांक (ग्रुपांक)  $\frac{1}{2}(n!)$  है ।

11) Prove that every finite group is isomorphic to some permutation group. (Cayley's Theorem).

सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक परिमित ग्रुप किसी क्रमचय ग्रुप के तुल्यकारिक होता है। (कैले-प्रमेय).

12) Prove that every ring  $R$  can be embedded in a ring with unity  $R'$ .

सिद्ध कीजिए कि किसी भी वलय  $R$  का एक इकाई सहित वलय (तत्सम की वलय)  $R'$  में अन्तःस्थापन किया जा सकता है।

13) Prove that any two basis of a finite dimensional vector space  $V$  consists of same number of elements.

सिद्ध कीजिए कि परिमित विमीय सदिश समष्टि  $V$  के कोई भी दो आधारों में अवयवों की संख्या समान होती है।

—————