MT-04

June - Examination 2019

B.A. / B.Sc. Pt. II Examination

Real Analysis & Metric Space

Paper - MT-04

Time : 3 Hours] **[Max. Marks :- 47**

Note: The question paper is divided into three sections A, B and C. Use of non-programmable scientific calculator is allowed in this paper.

निर्देश : प्रश्न पत्र तीन खण्डों 'अ', 'ब' और 'स' में विभाजित है। इस प्रश्नपत्र में नॉन–प्रोग्रामेबल साइंटीफिक केल्कुलेटर के उपयोग की अनुमति हैं।

Section - A **$7 \times 1 = 7$**

(Very Short Answer Type Questions)

Note: Section - A contains seven (07) Very Short Answer Type Questions, Examinees have to attempt all questions. Each question is of 01 marks and maximum word limit may be thirty words.

खण्ड – 'अ'

(अति लघु उत्तरीय प्रश्न)

निर्देश : खण्ड 'ए' में सात (07) अतिलघुउत्तरात्मक प्रश्न हैं, परीक्षार्थियों को सभी प्रश्नो को हल करना हैं। प्रत्येक प्रश्न के 01 अंक है और अधिकतम शब्द सीमा तीस शब्द हैं।

1) (i) If F is a ordered field and $a, b, c \in F$ then prove that
यदि F एक क्रमित क्षेत्र हो, तथा $a, b, c \in F$ हो, तो सिद्ध कीजिये कि
$a > b \wedge c > d \Rightarrow a + c > b + d$

(ii) Define limit point of a set.
किसी समुच्चय के सीमा बिन्दु को परिभाषित कीजिये।

(iii) Define limit of a sequence.
अनुक्रम की सीमा को परिभाषित कीजिये।

(iv) Give an example of removable singularity.
निराकरणीय असांतत्यता का उदाहरण दीजिये।

(v) Define Norm of a partition.
विभाजन का मानक को परिभाषित कीजिये।

(vi) Define metric space.
दूरीक समष्टि को परिभाषित कीजिये।

(vii) Define Cauchy sequence for metric space.
दूरीक समष्टि में कोशी अनुक्रम को परिभाषित कीजिये।

Section - B **4 × 5 = 20**

(Short Answer Type Questions)

Note: Section - B contains Eight Short Answer Type Questions. Examinees will have to answer any four (04) question. Each question is of 05 marks. Examinees have to delimit each answer in maximum 200 words.

(खण्ड – ब)

(लघु उत्तरीय प्रश्न)

निर्देश : खण्ड 'बी' में आठ लघु उत्तर प्रकार के प्रश्न हैं, परीक्षार्थियों को किन्ही भी चार (04) सवालों के जवाब देना हैं। प्रत्येक प्रश्न 05 अंकों का है। परीक्षार्थियों को अधिकतम 200 शब्दों में प्रत्येक जवाब परिसीमित करने हैं।

2) In p and q are rational and irrational numbers respectively then prove that $p+q$ and $pq(p \neq 0)$ are irrational numbers.
यदि p और q क्रमशः परिमेय तथा अपरिमेय संख्या हो, तो सिद्ध कीजिये कि $p+q$ और $pq(p \neq 0)$ अपरिमेय संख्या होती है।

3) Prove that every infinite bounded set has least one limit point.
सिद्ध कीजिये कि प्रत्येक अपरिमित परिबद्ध समुच्चय का कम से कम एक सीमा बिन्दु होता है।

4) State and prove Mosterest's theorem.
मॉस्टेस्ट प्रमेयका कथन कर सिद्ध कीजिये।

5) Prove that function

$$f(x) = \begin{Bmatrix} 4-x & x \in (2,3) \\ 3x-8 & x \in (3,4) \end{Bmatrix}$$

Is not differentiable at $x = 3$ but continuous at $x = 3$

सिद्ध कीजिये की फलन

$$f(x) = \begin{Bmatrix} 4-x & x \in (2,3) \\ 3x-8 & x \in (3,4) \end{Bmatrix}$$

$x = 3$ पर अवकलनीय नहीं है यदपि यह $x = 3$ पर संतत है।

6) Show that every constant function $f(x) = k$ is Riemann integrable and $\int_a^b k dx = k(b-a)$

प्रदर्शित कीजिये कि प्रत्येक स्थिरांक फलन $f(x) = k$ रीमान समाकलनीय होता है तथा $\int_a^b k dx = k(b-a)$

7) Show that sequence $< nxe^{-nx^2} >$ is point wise convergent in interval $[0, k], k > 0$ but not uniformly convergent.
प्रदर्शित कीजिये की अनुक्रम $< nxe^{-nx^2} >$ अन्तराल $[0, k], k > 0$ में बिन्दुशः अभिसारी है परन्तु एक समान रूप से अभिसारी नहीं हैं।

8) State and prove Dinni's theorem for uniformly convergent sequence.
एक समान रूप से अभिचारी अनुक्रम के लिए डिनी प्रमेय का कथन कर सिद्ध कीजिये।

9) Prove that every closed sphere in a metric space is a closed set.
सिद्ध कीजिए कि एक दूरीक समष्टि में प्रत्येक संवृत गोला एक संवृत समुच्चय होता है।

Section - C **2 × 10 = 20**

(Long Answer Type Questions)

Note: Section - C contains 4 Long answer type questions. Examinees will have to answer any two (02) questions. Each question is of 10 marks. Examinees have to answer in maximum 500 words.

(खण्ड – स)

(दीर्घ उत्तरीय प्रश्न)

निर्देश : खण्ड 'सी' में 4 प्रश्न हैं। परीक्षार्थियों को किन्ही भी दो (02) सवालों के जवाब देना हैं। प्रत्येक प्रश्न 10 अंकों का हैं। परीक्षार्थियों को अधिकतम 500 शब्दों में प्रत्येक जवाब परिसीमित करने है।

10) i) Prove that if $\{x_n\}$ is a convergent sequence then its limit is unique.

सिद्ध कीजिए की यदि $\{x_n\}$ एक अभिसारी अनुक्रम हो, तो सीमा अद्वितीय होती है।

ii) Prove that if sequence $\{x_n\}$ converges to l then sequence $\{a_n\}$ also converges to l where $a_n = \dfrac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}$ $\forall n \in N$

सिद्ध कीजिए कि यदि अनुक्रम $\{x_n\}, l$ को अभिसृत हो तो अनुक्रम $\{a_n\}$ भी l को अभिसृत होगा। जहाँ $a_n = \dfrac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n}$ $\forall n \in N$

11) (i) Prove that if Simultaneous limit of function $f(x, y)$ exits then Simultaneous limit is unique.

सिद्ध कीजिए क यदि फलन $f(x, y)$ की युगपत सीमा का अस्तित्व है तो युगपत् सीमा अद्वितीय होती है।

(ii) यदि X एक अरिक्त समुच्चय है, तो सिद्ध कीजिए कि फलन $d : X \times X \to R$ एक दूरीक है यदि और केवल यदि निम्न प्रतिबन्ध संतुष्ट होते हों

a) $d\,(x, y) = 0 \;\Leftrightarrow x = y, \forall x, y \in X$

b) $d(x, y) \le d\,(x, z) + d(y, z)\; \forall x, y, z \in X$

12) i) If X and Y are metric spaces then prove that a mapping $f: X \to Y$, is continuous on X if and only if every open subset G in Y, $f^{-1}(G)$, is open in X.

यदि X और Y दूरीक समष्टियाँ हैं तो सिद्ध कीजिए कि एक प्रतिचित्रण $f: X \to Y, X$ पर संतत है यदि व केवल यदि Y, के प्रत्येक विवृत उपसमुच्चय G के लिए $f^{-1}(G), X$ में विवृत है।

ii) Prove that non-empty closed subset of a compact metric space is compact.

सिद्ध कीजिए कि संहत दूरीक समष्टि का अरिक्त उपसमुच्चय संहत होता है।

13) i) If F $\subset$ R then prove that F is closed set if and only if $F' \subset F$ where F', is set of all limit points of F.

यदि F $\subset$ R तो सिद्ध कीजिए कि F संवृत समुच्चय है यदि और केवल यदि $F' \subset F$ जहाँ F', F के सभी सीमा बिन्दुओं का समूच्चय है।

ii) State and prove fundamental theorem of integral calculus.

समाकलन गणित की मूलभूत प्रमेय का कथन कर सिद्ध कीजिये।