

**MT-08**

June - Examination 2018

**B.A./B.Sc. Pt. III Examination****Complex Analysis****Paper - MT-08**

Time : 3 Hours ]

[ Max. Marks :- 67

Note: The question paper is divided into three sections A, B and C. Write answers as per the given instructions. Use of non-programmable scientific calculator is allowed in this paper.

**निर्देश :** यह प्रश्न पत्र 'अ', 'ब' और 'स' तीन खण्डों में विभाजित है। प्रत्येक खण्ड के निर्देशानुसार प्रश्नों का उत्तर दीजिए। इस प्रश्नपत्र में नॉन-प्रोग्रामेबल साइंटिफिक केलकुलेटर के उपयोग की अनुमति है।

Section - A

 $7 \times 1 = 7$ 

(Very Short Answer Type Questions)

Note: Section 'A' contain seven (07) Very Short Answer Type Questions. Examinees have to attempt all questions. Each question is of 01 mark and maximum word limit may be thirty words.

### खण्ड - 'अ'

(अति लघु उत्तर वाले प्रश्न)

**निर्देश :** खण्ड 'अ' में सात (07) अतिलघुउत्तरात्मक प्रश्न हैं, परीक्षार्थियों को सभी प्रश्नों को हल करना है। प्रत्येक प्रश्न के 01 अंक है और अधिकतम शब्द सीमा तीस शब्द हैं।

1) (i) Find amplitude of  $\frac{a + ib}{a - ib}$

$\frac{a + ib}{a - ib}$  का कोणांक ज्ञात कीजिए।

(ii) Define Convergent Sequence.

अभिसारी अनुक्रम को परिभाषित कीजिये।

(iii) Define limit of a complex function.

सम्मिश्र फलन की सीमा को परिभाषित कीजिये।

(iv) State Cauchy's General Principle of Uniform Convergence for Sequence.

अनुक्रमों के एकसमान अभिसरण के लिए कोशी का सामान्य सिद्धांत का कथन कीजिये।

(v) Prove that two power series  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$  and  $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$  has same radius of convergence.

सिद्ध कीजिए कि दो घात श्रेणी  $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$  तथा  $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$  की समान अभिसरण त्रिज्या है।

(vi) Define conformal mapping.

अनुकोण प्रतिचित्रण को परिभाषित कीजिये।

(vii) State Liouville's Theorem.

ल्यूवेल प्रमेय का कथन कीजिये।

## (Short Answer Questions)

Note: Section 'B' contain Eight Short Answer Type Questions. Examinee will have to answer any four (04) questions. Each question is of 08 marks. Examinees have to delimit each answer in maximum 200 words.

## (खण्ड - ब)

## (लघु उत्तरीय प्रश्न)

**निर्देश :** खण्ड 'ब' में आठ लघु उत्तर प्रकार के प्रश्न हैं, परीक्षार्थियों को किन्हीं भी चार (04) सवालों के जवाब देना हैं। प्रत्येक प्रश्न 08 अंकों का है। परीक्षार्थियों को अधिकतम 200 शब्दों में प्रत्येक जवाब परिसीमित करने है।

- 2) Prove that  $\left| \frac{z-1}{z+1} \right| = \lambda(\cos \tan t)$  and  $\text{amp} \left( \frac{z-1}{z+1} \right) = \mu(\cos \tan t)$  are two orthogonal circles.

सिद्ध कीजिए कि  $\left| \frac{z-1}{z+1} \right| = \lambda(\cos \tan t)$  तथा

$\text{amp} \left( \frac{z-1}{z+1} \right) = \mu(\cos \tan t)$  दो लम्ब कोणीय वृत्त हैं।

- 3) Prove that every closed and bounded set is compact.  
सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक संवृत्त एवं परिबद्ध समुच्चय संहत होता है।
- 4) Show that function  $f(z) = \sqrt{|xy|}$  satisfies Cauchy Riemann equations at origin but not analytic at origin.

प्रदर्शित कीजिए कि फलन  $f(z) = \sqrt{|xy|}$  मूल बिन्दु पर कोशी-रीमान समीकरणों को संतुष्ट करता है। परन्तु इस बिन्दु पर विश्लेषिक नहीं है।

- 5) Prove that a bilinear transformation transforms circles and straight lines in circles or straight line.

सिद्ध कीजिए कि द्विरैखिक रूपान्तरण, वृत्तों एवं सरल रेखाओं को वृत्तों या रेखाओं में प्रतिचित्रित करता है।

- 6) Describe the transformation  $w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$

रूपान्तरण  $w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$  की व्याख्या कीजिये।

- 7) State and prove Morera Theorem.

मोरेरा प्रमेय को कथन कर सिद्ध कीजिये।

- 8) Prove that polynomial  $z^5 + z^3 + 2z + 3$  has only one zero in first quadrant of complex plane.

सिद्ध कीजिए कि बहुपद  $z^5 + z^3 + 2z + 3$  का सम्मिश्र तल के प्रथम चतुर्थांश में केवल एक ही शून्य है।

- 9) Prove that :

सिद्ध कीजिए कि :

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{1 + a^2 - 2a \cos \theta} = \frac{2\pi}{1 - a^2}, 0 < a < 1$$

### Section - C

**2 × 14 = 28**

(Long Answer Questions)

Note: Section 'C' contain 4 Long Answer Type Questions. Examinees will have to answer any two (02) questions. Each question is of 14 marks. Examinees have to delimit each answer in maximum 500 words.

## (खण्ड - स)

(दीर्घ उत्तरीय प्रश्न)

**निर्देश :** खण्ड 'स' में 4 निबन्धात्मक प्रश्न हैं। परीक्षार्थियों को किन्हीं भी दो (02) सवालों के जवाब देना हैं। प्रत्येक प्रश्न 14 अंकों का है, परीक्षार्थियों को अधिकतम 500 शब्दों में प्रत्येक जवाब परिसीमित करने है।

10) (i) Prove that function  $f(z) = |z|^2$  is continuous everywhere but not differentiable at any point except origin.

सिद्ध कीजिए कि फलन  $f(z) = |z|^2$  सर्वत्र संतत है परन्तु मूल बिन्दु के अतिरिक्त कहीं भी अवकलनीय नहीं है।

(ii) State and prove Casorati - Weierstrass Theorem.

केसोराती-वाइरस्ट्रास प्रमेय को कथन कर सिद्ध कीजिये।

11) State and prove Cauchy-Goursat Theorem.

कोशी-गूर्सा प्रमेय को कथन कर सिद्ध कीजिये।

12) Expand function  $f(z) = \frac{z^2 - 4}{(z + 1)(z + 4)}$  valid in region

(i)  $|z| < 1$       (ii)  $1 < |z| < 4$       (iii)  $|z| > 4$

फलन  $f(z) = \frac{z^2 - 4}{(z + 1)(z + 4)}$  का प्रसार करो जो कि निम्न के लिये वैध हो

(i)  $|z| < 1$       (ii)  $1 < |z| < 4$       (iii)  $|z| > 4$

13) Explain the following :

निम्न को समझाइए :

- (i) Analytic continuation along a chain of domains  
प्रांतों की श्रंखला के अनुदिश विश्लेषिक सांतत्य
  - (ii) Analytic continuation by a power series  
घात श्रेणी द्वारा विश्लेषिक सांतत्य
  - (iii) Direct analytic continuation  
सीधा विश्लेषिक सांतत्य
-