# MT-07

## June - Examination 2018

## B.A. / B.Sc. Pt. III Examination

## Algebra

## Paper - MT-07

**Time : 3 Hours ]** **[ Max. Marks :- 67**

**Note:** The question paper is divided into three sections A, B and C.

**निर्देश :** प्रश्न पत्र तीन खण्डों 'अ', 'ब' और 'स' में विभाजित है।

**Section - A** **$7 \times 1 = 7$**

(Contain seven (07) Very Short Answer Type Questions)

**Note:** Examinees have to attempt all questions. Each question is of 01 marks and maximum word limit may be thirty words.

**खण्ड – 'अ'**

(अति लघु उत्तरीय प्रश्न)

**निर्देश :** खण्ड 'अ' में सात (07) अतिलघुउत्तरात्मक प्रश्न हैं, परीक्षार्थियों को सभी प्रश्नों को हल करना हैं। प्रत्येक प्रश्न के 01 अंक है और अधिकतम शब्द सीमा तीस शब्द हैं।

1) (i) Define binary operation.

द्विआधारी संक्रिया को परिभाषित कीजिये।

(ii) What is the order of cyclic permutation $f = (1\ 4\ 3\ 5) \in S_6$

चक्रीय क्रमचय $f = (1\ 4\ 3\ 5) \in S_6$ की कोटि बताइए।

(iii) Define homomorphism.

समाकारिता को परिभाषित कीजिये।

(iv) Define ring without zero divisor.

शून्य भाजक रहित वलय को परिभाषित कीजिये।

(v) Give an example of field.

क्षेत्र का एक उदहारण दीजिये।

(vi) Define proper subspace.

उचित उपसमष्टि को परिभाषित कीजिये।

(vii) What is the dimension of vector space

$$V(R) = \left\{ (a, b, c) \mid a, b, c \in R \right\}$$

सदिश समष्टि $V(R) = \left\{ (a, b, c) \mid a, b, c \in R \right\}$ की विमा बताइए।

## Section - B $4 \times 8 = 32$

(Contain Eight Short Answer Type Questions)

**Note:** Examinees will have to answer any four (4) question. Each question is of 08 marks. Examinees have to delimit each answer in maximum 200 words.

## खण्ड – ब

(लघु उत्तरीय प्रश्न)

**निर्देश :** खण्ड 'ब' में आठ लघु उत्तर प्रकार के प्रश्न हैं, परीक्षार्थियों को किन्ही भी चार (04) सवालों के जवाब देना हैं। प्रत्येक प्रश्न 08 अंकों का है। परीक्षार्थियों को अधिकतम 200 शब्दों में प्रत्येक जवाब परिसीमित करने हैं।

2) Show that the set G = {1, -1, i, -i) where $i = \sqrt{1}$, is an commutative group for multiplication operation.
प्रदर्शित कीजिए कि समुच्चय G = {1, -1, i, -i) जहाँ $i = \sqrt{1}$, गुणन संक्रिया के लिए एक क्रमविनिमेय समूह है।

3) Show that the symmetric group $S_3$ of degree 3, is a finite noncommutative group for operation permutation multiplication.
प्रदर्शित कीजिए की तीन अशांक सममित समूह $S_3$ क्रमचय गुणन संक्रिया के लिए एक परिमित अक्रमविनिमेय समूह है।

4) Prove that is f is homomorphism from group (G, ∗) to (G',∗'), then the kernel K of f is subgroup of G.
सिद्ध कीजिये यदि f समूह (G, ∗) से समूह (G',∗'), में समाकारिता हो तो f की अष्टि K समूह G का उपसमूह होता हैं।

5) Prove that ring $(R, +, \cdot)$ is ring without zero divisor if and only if cancellation law holds in R.
सिद्ध कीजिये कि वलय $(R, +, \cdot)$ एक शून्य भाजक रहित वलय होती है और केवल यदि R में निरसन नियम लागू होते हैं।

6) Every field is without zero divisor.
प्रत्येक क्षेत्र शून्य भाजक रहित होता है।

7) Examine whether the set $S = \left\{ A \mid A = \begin{bmatrix} m & 0 \\ n & 0 \end{bmatrix}; m, n \in Z \right\}$ is ideal for the ring $R = \left\{ B \mid B = \begin{bmatrix} m & p \\ n & q \end{bmatrix}; m, n, p, q \in Z \right\}$?

परीक्षण कीजिये की क्या समुच्चय $S = \left\{ A \mid A = \begin{bmatrix} m & 0 \\ n & 0 \end{bmatrix}; m, n \in Z \right\}$ वलय $R = \left\{ B \mid B = \begin{bmatrix} m & p \\ n & q \end{bmatrix}; m, n, p, q \in Z \right\}$ की गुणजावली है?

8) Let $v = (1, \alpha, 5)$, be element of vector space $V(R) = \left\{ (a_1, a_2, a_3) \middle| a_1, a_2, a_3 \in R \right\}$. For what value of α the given vector v can be expressed as linear combination of vectors $v_1 = (1, -3, 2), v_2 = (2, -1, 1)$

माना $v = (1, \alpha, 5)$, सदिश समष्टि $V(R) = \left\{ (a_1, a_2, a_3) \middle| a_1, a_2, a_3 \in R \right\}$ का कोई अवयव है। α के किस मान के लिए दिए गये सदिश v को सदिशो $v_1 = (1, -3, 2), v_2 = (2, -1, 1)$ के एकघात संचय के रूप में व्यक्त कर सकते हैं।

9) Let $V = \left\{ (a, b, c) \middle| a, b, c \in R \right\}$ be the vector space. Again let $U = \left\{ (a, b, a) \middle| a, b \in R \right\}$ and $W = \left\{ (0, 0, c) \middle| c \in R \right\}$ are two subspaces of V. Show that $V = U \oplus W$.

माना $V = \left\{ (a, b, c) \middle| a, b, c \in R \right\}$ एक सदिश समष्टि है। पुनः माना $U = \left\{ (a, b, a) \middle| a, b \in R \right\}$ और $W = \left\{ (0, 0, c) \middle| c \in R \right\}$ V की दो उपसमष्टियाँ हैं। प्रदर्शित कीजिये की $V = U \oplus W$.

## Section - C                2 × 14 = 28

(Contain 4 Long Answer Type Questions)

**Note:** Examinees will have to answer any two (02) questions. Each question is of 14 marks. Examinees have to answer in maximum 500 words. Use of non-programmable scientific calculator is allowed in this paper.

## खण्ड – स

(दीर्घ उत्तरीय प्रश्न)

**निर्देश :** खण्ड 'स' में 4 निबन्धात्मक प्रश्न हैं। परीक्षार्थियों को किन्ही भी दो (02) सवालों के जवाब देना हैं। प्रत्येक प्रश्न 14 अंकों का हैं। परीक्षार्थियों को अधिकतम 500 शब्दों में प्रत्येक जवाब परिसीमित करने है। इस प्रश्नपत्र में नॉन–प्रोग्रामेबल साइंटीफिक केल्कुलेटर के उपयोग की अनुमति हैं।

10) (i) Show that set $G=\{a+b\sqrt{2}: a,b\in Q\}$ is commutative group for addition operation

प्रदर्शित कीजिए कि समुच्चय $G=\{a+b\sqrt{2}: a,b\in Q\}$ योग संक्रिया के लिए क्रमविनिमेय समूह है।

(ii) If $f=\begin{pmatrix}123456789\\254631978\end{pmatrix}\in S_9$ then write f in terms of product of disjoint cycles and find order of f also.

यदि $f=\begin{pmatrix}123456789\\254631978\end{pmatrix}\in S_9$ तो f को असंयुक्त चक्रो के गुणनफल के रुप में लिखिये तथा f की कोटि भी ज्ञात कीजिये।

11) If $\oplus$ and $\odot$ are operations defined on set of real numbers, where $a \oplus b = a + b + 1$ and $a \odot b = a + b + ab$, $\forall a, b \in R$

Then prove that $(R, \oplus, \odot)$ is commutative ring with unity.

यदि $\oplus$ एवं $\odot$ वास्तविक संख्याओं के समुच्चय R पर परिभाषित संक्रियाएँ हैं, जहाँ, $a \oplus b = a + b + 1$ तथा $a \odot b = a + b + ab$, $\forall a, b \in R$ तब सिद्ध कीजिये कि $(R, \oplus, \odot)$ एक इकाई अवयव सहित क्रमविनिमेय वलय है।

12) (i) If V be the vector space over field F and W be nonvoid subset of V, then W is subspace of V if and only if

यदि V क्षेत्र F पर सदिश समष्टि हो और W, V का अरिक्त उपसमुच्चय, तो W, V की उपसमष्टि होगी यदि और केवल यदि

(a) $\forall u, v \in W \Rightarrow u - v \in W$

(b) $\forall a \in F, u \in W \Rightarrow au \in W$

(ii) Show that vectors $v_1$ = (6, 2, 3, 4), $v_2$ = (0, 5, –3, 1) and $v_3$ = (0, 0, 7, –2) in $V(R) = \{(a_1, a_2, a_3, a_4) \mid a_1, a_2, a_3, a_4 \in R\}$ are linearly independent.

सिद्ध करो कि सदिश समष्टि

$V(R) = \{(a_1, a_2, a_3, a_4) \mid a_1, a_2, a_3, a_4 \in R\}$ में सदिश $v_1$ = (6, 2, 3, 4), $v_2$ = (0, 5, –3, 1) तथा $v_3$ = (0, 0, 7, –2) एकघातत: स्वतन्त्र हैं।

13) If $W_1$ and $W_2$ are finite dimensional vector subspaces of vector space $V(F)$, then show that

dim $(W_1+W_2)$ = dim $W_1$ + dim $W_2$ – dim $(W_1 \cap W_2)$

यदि $W_1$ एवं $W_2$ किसी परिमित विमीय सदिश समष्टि $V(F)$ की दो उपसमष्टियाँ हों, तो विमा $(W_1+W_2)$ = विमा $W_1$ + विमा $W_2$ – विमा $(W_1 \cap W_2)$.