

MT-08

June - Examination 2017

B.A./B.Sc. Pt. III Examination**Complex Analysis****Paper - MT-08****Time : 3 Hours]****[Max. Marks :- 67**

Note: The question paper is divided into three sections A, B and C. Write answers as per the given instructions. Use of non-programmable scientific calculator is allowed in this paper.

निर्देश : प्रश्न पत्र तीन खण्डों 'अ', 'ब' और 'स' में विभाजित है। प्रत्येक खण्ड के निर्देशानुसार प्रश्नों के उत्तर दीजिए। इस प्रश्नपत्र में नॉन-प्रोग्रामेबल साइंटिफिक कैल्कुलेटर के उपयोग की अनुमति है।

Section - A**7 × 1 = 7**

(Contain Seven (07) Very Short Answer Type Questions)

Note: Examinees have to attempt all questions. Each question is of 01 marks and maximum word limit may be thirty words.

खण्ड - 'अ'

(अति लघु उत्तरीय प्रश्न)

निर्देश : खण्ड 'अ' में सात (07) अतिलघुउत्तरात्मक प्रश्न हैं, परीक्षार्थियों को सभी प्रश्नों को हल करना है। प्रत्येक प्रश्न को 01 अंक है और अधिकतम शब्द सीमा तीस शब्द है।

- 1) (i) Define complex number
सम्मिश्र संख्या को परिभाषित करें।
- (ii) State Heine-Borel theorem.
हेने बोरेल प्रमेय का कथन लिखें।
- (iii) Define power series.
घात श्रेणी को परिभाषित करें।
- (iv) Write statement of Morera's theorem.
मोरेरा प्रमेय का कथन लिखिए।
- (v) Define Bilinear transformation.
द्विरैखिक रूपान्तरण को परिभाषित करें।
- (vi) State Cauchy's inequality.
कोशी असमिका का कथन लिखें।
- (vii) Define Pole
अनंतक को परिभाषित करें।

Section - B

$4 \times 8 = 32$

(Contain Eight Short Answer Type Questions)

Note: Examinees will have to answer any four (4) question. Each question is of 08 marks. Examinees have to delimit each answer in maximum 200 words.

(खण्ड - ब)

(लघु उत्तरीय प्रश्न)

निर्देश : खण्ड 'ब' में आठ लघु उत्तर प्रकार के प्रश्न हैं, परीक्षार्थियों को किन्हीं भी चार (04) सवालों के जवाब देना हैं। प्रत्येक प्रश्न 08 अंक का है। परीक्षार्थियों को अधिकतम 200 शब्दों में प्रत्येक जवाब परिसीमित करने हैं।

2) Prove that

सिद्ध कीजिए कि

$$\lim_{z \rightarrow i} \frac{3z^4 - 2z^3 + 8z^2 - 2z + 5}{z - i} = 4 + 4i$$

3) Evaluate

मान ज्ञात कीजिए

$$\int_{|z|=3} \frac{\sin \pi z^2 + \cos \pi z^2}{(z-1)(z-2)} dz$$

4) Show that the function $f(z) = u + iv$ where

$$f(z) = \frac{x^3(1+i) - y^3(1-i)}{x^2 + y^2} (z \neq 0),$$

$$f(0) = 0$$

is continuous and that the Cauchy Riemann equations are satisfied at the origin. Yet $f'(0)$ does not exist.

दर्शाइए कि फलन $f(z) = u + iv$ जहाँ

$$f(z) = \frac{x^3(1+i) - y^3(1-i)}{x^2 + y^2} (z \neq 0),$$

$$f(0) = 0$$

संतत है तथा मूल बिन्दू पर कोशी-रीमान समीकरण सन्तुष्ट होती है। यद्यपि $f'(0)$ का अस्तित्व मूल बिन्दू पर नहीं है।

5) Find radius of convergence for the following power series:

निम्नघात श्रेणियों की अभिसरण त्रिज्याएँ ज्ञात कीजिए।

$$(i) \sum_{n=1}^{\infty} (3 + 4i)^n z^n$$

$$(ii) \sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} z^n$$

6) State and prove Liouville's theorem.

ल्यूवेल प्रमेय का कथन कर सिद्ध करें।

7) State and prove Rouché's theorem.

रूशे प्रमेय का कथन कर सिद्ध करें।

8) Prove that the residues of functions

$\frac{z}{(z-a)(z-b)}$ and $\frac{z^3 - z^2 + 1}{z^3}$ at $z = \infty$ are -1 and 1 respectively.

सिद्ध कीजिये कि $z = \infty$ पर फलनों

$\frac{z}{(z-a)(z-b)}$ तथा $\frac{z^3 - z^2 + 1}{z^3}$ के अवशेष क्रमशः -1 तथा 1 हैं।

9) Show that the transformation $w = \frac{2z+3}{z-4}$ maps the circle

$x^2 + y^2 - 4x = 0$ into the straight line.

प्रदर्शित कीजिए की रूपान्तरण $w = \frac{2z+3}{z-4}$, वृत्त $x^2 + y^2 - 4x = 0$ को सरल रेखा में प्रतिचित्रित करता है।

Section - C

$2 \times 14 = 28$

(Contain 4 Long Answer Type Questions)

Note: Examinees will have to answer any two (02) questions. Each question is of 14 marks. Examinees have to answer in maximum 500 words.

(खण्ड - स)

(दीर्घ उत्तरीय प्रश्न)

निर्देश : खण्ड 'स' में 4 निबन्धात्मक प्रश्न हैं। परीक्षार्थियों को किन्हीं दो (02) सवालों के जवाब देना हैं। प्रत्येक प्रश्न 14 अंकों का हैं। परीक्षार्थियों को अधिकतम 500 शब्दों में प्रत्येक जवाब परिसीमित करने हैं।

10) State and prove cauchy's integral formula.

कोशी समाकलन सूत्र का कथन कर सिद्ध करें।

11) State and prove necessary and sufficient condition for $f(z)$ to be analytic.

विश्लेषिक फलन के लिए आवश्यक व पर्याप्त प्रतिबन्ध का कथन कर सिद्ध करें।

12) Obtain expansion for function $f(z) = \frac{1}{z^2 - 3z + 2}$ which are valid, for the regions.

(i) $|z| < 1$, (ii) $1 < |z| < 2$ and

(iii) $|z| > 2$

निम्न क्षेत्र में फलन $f(z) = \frac{1}{z^2 - 3z + 2}$ का प्रसार ज्ञात करो:

(i) $|z| < 1$, (ii) $1 < |z| < 2$ तथा

(iii) $|z| > 2$

13) If $a \geq b \geq 0$, then show that

यदि $a \geq b \geq 0$, तो सिद्ध कीजिये कि

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos ax - \cos bx}{x^2} dx$$

$$= \frac{\pi}{2} (b - a)$$