MT-07

June - Examination 2017

B.A./B.Sc. Pt. III Examination

Algebra

Paper - MT-07

Time : 3 Hours] **[Max. Marks :- 67**

Note: The question paper is divided into three sections A, B and C.

निर्देश : प्रश्न पत्र तीन खण्डों 'अ', 'ब' और 'स' में विभाजित है।

Section - A $7 \times 1 = 7$

(Contain seven (07) Very Short Answer Type Questions)

Note: Examinees have to attempt all questions. Each question is of 01 marks and maximum word limit may be thirty words.

खण्ड – 'अ'

(अति लघु उत्तरीय प्रश्न)

निर्देश : खण्ड 'अ' में सात (07) अतिलघुउत्तरात्मक प्रश्न हैं, परीक्षार्थियों को सभी प्रश्नों को हल करना हैं। प्रत्येक प्रश्न को 01 अंक है और अधिकतम शब्द सीमा तीस शब्द हैं।

1) (i) Define order of a group.
समूह की कोटि को परिभाषित कीजिये।

(ii) Define group homomorphism.
समूह समकारिता को परिभाषित कीजिये।

(iii) Find all the cosets of subgroup $H = [\{1, -1\} \cdot]$ in group $G = [\{1, -1, i, -i\} \cdot]$

$G = [\{1, -1, i, -i\} \cdot]$ में उपसमूह $H = [\{1, -1\} \cdot]$ के सभी सहसमुच्चय ज्ञात कीजिए।

(iv) Define Bases of vector space

सदिश समष्टि के आधार को परिभाषित कीजिए।

(v) Define ideals of a ring.

वलय की गुणजावली को परिभाषित कीजिये।

(vi) Define integral domain.

पूर्णाकीय प्रांत को परिभाषित कीजिये।

(vii) Define linear combination of vectors.

सदिशों के एकघात संचय को परिभाषित कीजिये।

Section - B $\qquad 4 \times 8 = 32$

(Contain Eight Short Answer Type Questions)

Note: Examinees will have to answer any four (4) question. Each question is of 08 marks. Examinees have to delimit each answer in maximum 200 words.

(खण्ड – ब)

(लघु उत्तरीय प्रश्न)

निर्देश : खण्ड 'ब' में आठ लघु उत्तर प्रकार के प्रश्न हैं, परीक्षार्थियों को किन्हीं भी चार (04) सवालों के जवाब देना हैं। प्रत्येक प्रश्न 08 अंक को का है। परीक्षार्थियों को अधिकतम 200 शब्दों में प्रत्येक जवाब परिसीमित करने हैं।

2) Prove that set G = {1, 2, 3, 4} is and abelian group for operation X_5 (mod 5) where

$$a \times_5 b = \begin{cases} a \times b & \text{If } a \times b < 5 \\ \dfrac{a \times b}{5} \text{ Remainder of} & \text{If } a \times b \geq 5 \end{cases}$$

प्रदर्शित कीजिए कि समुच्चय G = {1, 2, 3, 4} संक्रिया X_5 (मॉड्यूलों गुणा 5) के लिये एक क्रमविनिमेय समूह है जहाँ

$$a \times_5 b = \begin{cases} a \times b & \text{यदि } a \times b < 5 \\ \dfrac{a \times b}{5} \text{ का शेष फल ,} & \text{यदि } a \times b \geq 5 \end{cases}$$

3) Show that 3-symmetric group S_3 is an finite group for multiplication of permutations.
प्रदर्शित कीजिए की तीन अशांक सममित समूह S_3, क्रमचय गुणन संक्रिया के लिए एक परिमित समूह है।

4) State and prove Lagrange's theorem for finite groups.
परिमित समूहों के लिए लेग्रेंज प्रमेय का कथन कर सिद्ध कीजिये।

5) If Z (G) is centre of group G and $G/Z(G)$ is cyclic then prove that G is an abelian group.
यदि Z (G) समूह G का केंद्र है तथा $G/Z(G)$ चक्रीय है, तो सिद्ध कीजिये कि G आबेली समूह होगा।

6) Prove that characteristic of an integral domain is zero or a prime number.
सिद्ध कीजिये कि पूर्णांकीय प्रान्त का अभिलक्षण शून्य अथवा एक अभाज्य संख्या होती है।

7) Prove that set $S = \{v_1, v_2, v_3, ...v_n,\}$ of non zero vectors of vector space V(F) is linearly dependent if and only if any vector $v_m \in S$, is linear combination of previous vectors where $2 \le m \le n$
सिद्ध कीजिये की किसी सदिश समष्टि V(F) में अशून्य सदिशों का समुच्चय $S = \{v_1, v_2, v_3, ...v_n,\}$ एकघाततः आश्रित होगा यदि और केवल यदि जब कोई एक सदिश $v_m \in S$ अपने पूर्ववर्ती सदिशों का एकघात संचयहो, जहाँ $2 \le m \le n$

8) Show that set $S = \{v_1 = (1,0,0), v_2 = (1,1,0), v_3 = (1,1,1)\}$ is base for Vector space $V(R) = \{(a,b,c,)| a, b, c \in R\}$
प्रदर्शित कीजिये कि समुच्चय
$S = \{v_1 = (1,0,0), v_2 = (1,1,0), v_3 = (1,1,1)\}$ सदिश समष्टि $V(R) = \{(a,b,c,)| a, b, c \in R\}$ का आधार है।

9) If W_1 and W_2 are any 2 subspaces of vector space V(F) then prove that dim. $(W_1 + W_2) = \dim.(W_1) + \dim.(W_2) - \dim.(W_1 \cap W_2)$
यदि W_1 एवं W_2 किसी परिमित विमीय सदिश समष्टि V(F) की दो उपसमष्टियाँ हों, तो सिद्ध कीजिये कि विमा $(W_1 + W_2)$ = विमा W_1 + विमा W_2 − विमा $(W_1 \cap W_2)$.

Section - C **2 × 14 = 28**

(Contain 4 Long Answer Type Questions)

Note: Examinees will have to answer any two (02) questions. Each question is of 14 marks. Examinees have to answer in maximum 500 words. Use of non-programmable scientific calculator is allowed in this paper.

(खण्ड – स)

(दीर्घ उत्तरीय प्रश्न)

निर्देश : खण्ड 'स' में 4 निबन्धात्मक प्रश्न हैं। परीक्षार्थियों को किन्हीं भी दो (02) सवालों के जवाब देना हैं। प्रत्येक प्रश्न 14 अंकों का हैं। परीक्षार्थियों को अधिकतम 500 शब्दों में प्रत्येक जवाब परिसीमित करने है। इस प्रश्नपत्र में नॉन–प्रोग्रामेबल साइंटीफिक केल्कुलेटर के उपयोग की अनुमति हैं।

10) Prove that $R = \{m + n\sqrt{2} \mid m, n \in Z\}$ together with ordinary addition and multiplication is a commutative ring with unity.
सिद्ध कीजिये कि, सामान्य योगफल तथा गुणनफल संक्रियाओं के सापेक्ष $R = \{m + n\sqrt{2} \mid m, n \in Z\}$ इकाई अवयव सहित एक क्रमविनिमेय वलय है।

11) Prove that a ring without unity can be embedded in a ring with unity.
सिद्ध कीजिये कि इकाई अवयव रहित वलय को किसी इकाई अवयव सहित वलय में अंतस्थापित किया जा सकता है।

12) Prove that matrix set
$V = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \mid a, b \in R \right\}$ is a vector space over set of real numbers R for matrix addition and matrix scaler multiplication.
सिद्ध कीजिये कि मैट्रिक्स समुच्चय

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} \mid a, b \in R \right\}$$

मैट्रिक्स योग एवं मैट्रिक्स अदिश गुणन के सापेक्ष वास्तविक संख्याओं के क्षेत्र R पर एक सदिश समष्टि है।

13) (i) Prove that intersection of 2 normal subgroups of a group is a normal subgroup of that group. (4)

सिद्ध कीजिये कि किसी समूह के किन्हीं दो प्रसामान्य उपसमूहों का सर्वनिष्ठ भी उस समूह का प्रसामान्य उपसमूह होता है।

(ii) State and prove Caleys Theorem for group homomorphism.(10)

समूह समकारिता के लिए कैले–प्रमेय को कथन कर सिद्ध कीजिये।