MSCPH-01

June - Examination 2017

MSc (Previous) Physics Examination

Mathematical Physics and Classical Mechanics

गणितीय भौतिकी तथा चिरसम्मत यांत्रिकी

Paper - MSCPH-01

Time : 3 Hours] **[Max. Marks :- 80**

Note: The question paper is divided into three sections. A, B and C. Write answer as per the given instructions. Check your paper code and paper title before starting the paper. You are allowed to use a non-programmable calculator, however, sharing of calculator is not allowed. In case of any discrepancy English version will be final.

निर्देश : यह प्रश्न पत्र 'अ', 'ब' और 'स' तीन खण्डों में विभाजित हैं। प्रत्येक खण्ड के निर्देशानुसार प्रश्नों का उत्तर दीजिए। प्रश्नपत्र शुरू करने से पूर्व प्रश्नपत्र कोड व प्रश्नपत्र शीर्षक जाँच ले। आपको बिना प्रोग्रामिंग वाले केलकुलेटरके उपयोग की अनुमति है परन्तु केलकुलेटर के हस्तांतरण की अनुमति नहीं है। किसी भी विसंगता की स्थिति में अंग्रेजी रूप अन्तिम होगा।

Section - A $8 \times 2 = 16$

(Very Short Answer Type Questions) (Compulsory)

Note: Answer **all** questions. As per the nature of the question delimit your answer in one word, one sentence or maximum upto 30 words. Each question carries 2 marks.

खण्ड – 'अ'

(अति लघु उत्तर वाले प्रश्न)

निर्देश : सभी प्रश्नों के उत्तर दीजिए। आप अपने उत्तर को प्रश्नानुसार एक शब्द, एक वाक्य या अधिकतम 30 शब्दों में परिसीमित कीजिये। प्रत्येक प्रश्न 2 अंकों का है।

1) (i) Find the Laplace transform of the function $f(t) = t$.
फलन $f(t) = t$ का लाप्लास ट्रांसफॉर्म प्राप्त करें।

(ii) Write Lagrange's interpolation formula.
लेगरेंजी का इन्टरपोलेशन सूत्र लिखें।

(iii) Write Rodrigues formula for Hermite polynomials $H_n(x)$. Calculate $H_2(x)$.
रोड्रीग्स के सूत्र $H_n(x)$ लिखो हर्माइट फलन $H_2(x)$ का मान ज्ञात करें।

(iv) Define the Legendre polynomials $P_l(\cos\theta)$. Write the differential equation which the Legendre polynomials $P_l(\cos\theta)$ satisfy.
लिजेन्ड्री पोलीनोमिअल $P_l(\cos\theta)$ को परिभाषित करें। लिजेन्ड्री बहुपद $P_l(\cos\theta)$ द्वारा सन्तुष्ट होनेवाली अवकल समीकरण लिखो।

(v) Determine the Fourier transform F(k) of the Gaussian function: $f(x) = Ne^{-\alpha x^2}$ (Here N, α = constant).
गॉउशियन फलन $f(x) = Ne^{-\alpha x^2}$ के फूरिये रूपान्तरण F(k) प्राप्त करें। (N, α = स्थिरांक हैं)

(vi) Write the Lagrangian of a free particle in spherical polar coordinates (r, θ, ϕ).
एक मुक्त कण का लेगरेंजियन गोलीय निर्देशांक (r, θ, ϕ) में लिखें।

(vii) The Lagrangian for a simple pendulum is given by $L = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 - mgl(1 - \cos\theta)$. Write Hamilton's equations.

एक सरल लोलक का लेगरेंजियन $L = \frac{1}{2}ml^2\dot{\theta}^2 - mgl(1 - \cos\theta)$ इस सरल लोलक के लिये हेमिल्टन समीकरण लिखें।

(viii) Write equation which defines a contravariant tensor of second rank.

द्वितीय कोटि के कोन्ट्रावेरिऐंट टेंसर को परिभाषित करने वाला समीकरण लिखे।

Section - B **4 × 8 = 32**

(Short Answer Type Questions)

Note: Answer **any four** questions. Each answer should not exceed 200 words. Each question carries 08 marks.

(खण्ड – ब)

(लघु उत्तर वाले प्रश्न)

निर्देश : किन्ही चार प्रश्नों के उत्तर दीजिए। आप अपने उत्तर को अधिकतम 200 शब्दों में परिसीमित कीजिए। प्रत्येक प्रश्न 08 अंकों का है।

2) Write the generating function of the Hermite polynomials and show that the Hermite polynomials $H_n(x)$ satisfy the following recurrence relation: $H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x)$

हर्माइट पोलीनोमिअल के लिये जनित्र फलन लिखें तथा यह भी सिद्ध करें कि हर्माइट पोलीनोमिअल $H_n(x)$ निम्न रेकरेंस संबंध को संतुष्ट करता हैं; $H_{n+1}(x) = 2xH_n(x) - 2nH_{n-1}(x)$

3) Deduce the equation of motion in the Poisson bracket formulation.

गति का समीकरण पॉइशाँ ब्रेकेट के रूप में प्राप्त करें।

4) (i) Find the Laplace transform F(s) of the following functions $f(t) = \cos kt$ and $f(t) = e^{at}$

निम्न फलन $f(t)$ का लाप्लास ट्रॉसफॉर्म F(s) प्राप्त करें :
$f(t) = \cos kt$ तथा $f(t) = e^{at}$

(ii) Find the inverse Laplace transform $f(t)$, if $F(s) = \frac{1}{(s^2 - 5s + 6)}$

व्युत्क्रम लाप्लास ट्रॉंसफार्म $f(t)$ प्राप्त करें यदि $F(s) = \frac{1}{(s^2 - 5s + 6)}$ दिया है।

5) The Lagrangian of a particle of mass m moving in one-dimension is $L = exp(\alpha t)\left[\frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{kx^2}{2}\right]$ where α and k are positive constants. Deduce the equation of motion.

एक कण, जिसका द्रव्यमान m है, का लेगरेंजियन $L = exp(\alpha t)\left[\frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{kx^2}{2}\right]$ है, जहाँ α, k धनात्मक स्थिरांक हैं। इस कण की एक विमिय गति का समीकरण प्राप्त करें।

6) Consider the graph $y = f(x) = \cos x$ over [0.0, 1.2].

(i) Use the nodes $x_0 = 0.0, x_1 = 1.2$ (it means $f(x) = 0$ at these points) to construct a linear interpolation polynomial $P_1(x)$.

(ii) Use the nodes $x_0 = 0.2, x_1 = 1.0$ to construct a linear approximating polynomial $Q_1(x)$.

ग्राफ $y = f(x) = \cos x$, सीमा [0.0, 1.2] में परिभाषित है।

(i) यदि $x_0 = 0.0$ तथा $x_1 = 1.2$ पर नोड्स हों अर्थात् $f(x) = 0$ यदि $x_0 = 0.0$ तथा $x_1 = 1.2$ तो रेखीय पोलीनोमिअल $P_1(x)$ इन्टरपोलेशन सूत्र द्वारा प्राप्त करें।

(ii) यदि नोड्स $x_0 = 0.2$ तथा $x_1 = 1.0$ हों, तो रेखीय सन्निकटतः पोलिनोमिअल प्राप्त करें।

7) (i) Using Legendre's transformation obtain Hamilton's canonical equations.

(ii) Show that the total time derivative of the Hamiltonian satisfies the following relationship; $\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t}$

(i) लेजेंड्रे ट्रॉसफोर्मेशन के आधार पर हेमिल्टन केनेनीकल समीकरण प्राप्त करें।

(ii) हेमिल्टोनिअन H के लिए निम्न संबंध स्थापित करें; $\frac{dH}{dt} = \frac{\partial H}{\partial t}$

8) (i) Define the quotient law of tensors.

(ii) Define metric tensor. Give its significance. What is Christoffel symbol?

(i) टेंसर्स के लिये क्वोशेंट नियम परिभाषित करें।

(ii) मेट्रिक टेंसर परिभाषित करें। इसकी सार्थकता की व्याख्या करें। 'क्रिस्टोफल सिंबल' क्या होता है?

9) Prove the identities involving the Bessel functions:

(i) $2J_n^{'} = J_{n-1} - J_{n+1}$

(ii) $\frac{2n}{x} J_n = J_{n-1} + J_{n+1}$

बेसिल फलनों के लिये निम्न सर्वसमिका स्थापित करें;

(i) $2J_n^{'} = J_{n-1} - J_{n+1}$

(ii) $\frac{2n}{x} J_n = J_{n-1} + J_{n+1}$

Section - C $2 \times 16 = 32$

(Long Answer Type Questions)

Note: Answer **any two** questions. You have to delimit your each answer maximum up to 500 words. Each question carries 16 marks.

(खण्ड – स)

(दीर्घ उत्तर वाले प्रश्न)

निर्देश : किन्हीं दो प्रश्नों का उत्तर दीजिए। आप अपने उत्तर को अधिकतम 500 शब्दों में परिसीमित कीजिए। प्रत्येक प्रश्न 16 अंकों का है।

10) Describe the Hamilton–Jacobi method for finding the general integral of the equations of motion. Solve the harmonic oscillator problem using the Hamilton-Jacobi method.

गति के समीकरणों का व्यापक इन्टिग्रल प्राप्त करने के लिये हेमिल्टन–जेकॉबी विधि का वर्णन करें। हेमिल्टन जेकॉबी विधि का उपयोग करते हुए सरल आवर्त दोलित्र प्रॉब्लम को हल करें।

11) Find the Fourier transform $F(k)$ of the function

$$f(x) = \begin{Bmatrix} 1; (|x| \leq a) \\ 0; (|x| > a) \end{Bmatrix} (a > 0)$$

Plot the functions $f(x)$ and $F(k)$.

फूरिये ट्रॉंसफार्म $F(k)$ प्राप्त करें यदि $f(x)$ निम्न रूप में परिभाषित है:

$$f(x) = \begin{Bmatrix} 1; (|x| \leq a) \\ 0; (|x| > a) \end{Bmatrix} (a > 0)$$

फंक्शन $f(x)$ तथा $F(k)$ को ग्राफ पर प्रदर्शित करें।

12) (i) Derive the Lagrange equation from the principle of least action.

(ii) Show that the Lagrangian is defined only to within an additive total time derivative of any function of co-ordinates and time.

(i) 'न्यूनतम एक्शन' सिद्धान्त का उपयोग करते हुए लेगरेंजी समीकरण प्राप्त करें।

(ii) सिद्ध करें कि लेगरेंजियन फलन में किसी अन्य फलन, जो कि कॉर्डिनेट तथा समय पर निर्भर करता है, की सम्पूर्ण टाइम डेरिवेटिव के अन्तर्गत ही परिभाषित है।

13) (i) Write Bessel equation and find its solution. Plot the Bessel function $J_0(x)$ and $J_1(x)$.

(ii) Discuss the free vibrations of a circular membrane.

(i) बेसिल समीकरण लिखें तथा इस के हल प्राप्त करें। बेसिल फंक्शन $J_0(x)$ तथा $J_1(x)$ को ग्राफित करें।

(ii) वृत्तीय झिल्ली के मुक्त कम्पनों के हल प्राप्त करें।