

MT-02

June - Examination 2016

B.A./B.Sc. Pt. I Examination**Calculus and Differential Equations****Paper - MT-02****Time : 3 Hours]****[Max. Marks :- 67**

Note: The question paper is divided into three sections A, B and C. Use of non-programmable scientific calculator is allowed in this paper.

निर्देश : प्रश्न पत्र तीन खण्डों 'अ', 'ब' और 'स' में विभाजित है। इस प्रश्नपत्र में नॉन-प्रोग्रामेबल साइंटिफिक कैल्कुलेटर के उपयोग की अनुमति है।

Section - A**7 × 1 = 7**

(Very Short Answer Questions)

Note: Section 'A' contain seven (07) Very Short Answer Type Questions. Examinees have to attempt **all** questions. Each question is of 01 marks and maximum word limit may be thirty words.

खण्ड - 'अ'

(अति लघु उत्तरीय प्रश्न)

निर्देश : खण्ड 'अ' में 07 अति लघु उत्तरात्मक प्रश्न हैं, परीक्षार्थियों को सभी प्रश्नों को हल करना है। प्रत्येक प्रश्न के 01 अंक हैं और अधिकतम शब्द सीमा तीस शब्द हैं।

- 1) (i) Write the n^{th} term of the following series:

निम्न श्रेणी का n वाँ पद लिखिए:

$$1 + \frac{2x}{2!} + \frac{3^2 x^2}{3!} + \frac{4^3 x^3}{4!} + \text{-----}$$

- (ii) Write the condition of double point to be a node :

द्विक बिन्दु के नोड होने का प्रतिबंध लिखिए :

- (iii) How many asymptotes of the following curve :

दिए गए वक्र की कितनी अनन्त स्पर्शियाँ हैं :

$$x^2(x - y)^2 + a^2(x^2 - y^2) - a^2xy = 0$$

- (iv) Define Beta function.

बीटा फलन को परिभाषित कीजिए।

- (v) Write the formula of Logarithmic Ratio Test.

लघुगणकीय अनुपात परीक्षण का सूत्र लिखिए।

- (vi) State Taylor's theorem.

टेलर प्रमेय का कथन लिखिए

- (vii) Write the formula of derivative of length of an arc in cartesian form.

चाप की लम्बाई का अवकलन का कार्तीय सूत्र लिखिए।

Section - B

$4 \times 8 = 32$

(Short Answer Questions)

Note: Section 'B' contain Eight (08) Short Answer Type Questions. Examinees will have to answer **any four** (04) questions. Each question is of 08 marks. Examinees have to delimit each answer in maximum 200 words.

(खण्ड - ब)

(लघु उत्तरीय प्रश्न)

निर्देश : खण्ड 'ब' में 08 लघु उत्तर प्रकार के प्रश्न हैं, परीक्षार्थियों को किन्हीं भी चार (04) सवालों के जवाब देना हैं। प्रत्येक प्रश्न 08 अंक का है। परीक्षार्थियों को अधिकतम 200 शब्दों में प्रत्येक जवाब परिसीमित करने है।

- 2) Find maximum and minimum values of the function :
निम्न फलन का उच्चिष्ठ और निम्निष्ठ मान ज्ञात करो:

$$(x - 1)(x - 2)(x - 3).$$

- 3) If $u = F(y - z, z - x, x - y)$ then prove that

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0$$

यदि $u = F(y - z, z - x, x - y)$ हो तो सिद्ध करो कि

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial u}{\partial z} = 0$$

- 4) Trace the following cardioide:

निम्न हृदयाम का अनुरेखण करो

$$r = a(1 + \cos \theta)$$

- 5) Show that the pedal equation of the ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ is :

सिद्ध कीजिए कि दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ का पादिक समीकरण है:

$$\frac{1}{b^2} = \frac{1}{a^2} + \frac{1}{b^2} - \frac{r^2}{a^2 b^2}$$

- 6) Prove that the radius of curvature at any point (x, y) on the astroid $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ is three times the length of the perpendicular from the origin on the tangent at that point.

सिद्ध कीजिए की एस्ट्रायड $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ के किसी बिन्दु (x, y) पर वक्रता त्रिज्या मूल बिन्दु से स्पर्श रेखा पर खींचें गए लम्ब की लम्बाई की तीन गुनी होती है।

- 7) Show that the envelope of the straight line joining the extremities of a pair of semi conjugate diameter of the ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ is the ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{1}{2}$

सिद्ध कीजिए कि दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ के अर्ध संयुग्मी व्यासों के सिरों

को मिलाने वाली रेखा का अन्वालोप $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{1}{2}$ है।

- 8) Evaluate the following integral by changing to polar coordinates.
निम्न द्विसमाकल को ध्रुवीय निर्देशांको में परिवर्तित कर मान ज्ञात कीजिए।

$$\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy$$

- 9) Find the length of an arc of the cycloid

$$x = a(\theta + \sin \theta), y = a(1 - \cos \theta).$$

चक्रज $x = a(\theta + \sin \theta), y = a(1 - \cos \theta)$ के एक चाप की लम्बाई ज्ञात कीजिए।

Section - C

 $2 \times 14 = 28$

(Long Answer Questions)

Note: Section 'C' contain 04 Long Answer Type Questions. Examinees will have to answer **any two** (02) questions. Each question is of 14 marks. Examinees have to delimit each answer in maximum 500 words.

(खण्ड - स)

(दीर्घ उत्तरीय प्रश्न)

निर्देश : खण्ड 'स' में 04 निबंधात्मक प्रश्न हैं, परीक्षार्थियों को किन्हीं भी दो (02) सवालों के जवाब देना हैं। प्रत्येक प्रश्न 14 अंकों का हैं। परीक्षार्थियों को अधिकतम 500 शब्दों में प्रत्येक जवाब परिसीमित करने है।

10) (i) Show that the asymptotes of the following quartic cut the curve in the eight points which lie on a circle.

सिद्ध कीजिए कि निम्न चतुर्घाती की अनन्त स्पर्शियाँ वक्र को आठ बिन्दुओं पर काटती है जो एक वृत्त पर स्थित है।

$$(x^2 - 4y^2)(x^2 - 9y^2) + 5x^2y - 5xy^2 - 30y^3 + xy + 7y^2 - 1 = 0$$

(ii) If $u = e^{xyz}$ then prove that

यदि $u = e^{xyz}$ हो तो सिद्ध कीजिए

$$\frac{\partial^3 u}{\partial x \partial y \partial z} = (1 + 3xyz + x^2y^2z^2) e^{xyz}$$

11) (i) Evaluate (मान ज्ञात कीजिए)

$$\int_0^a \int_0^x \int_0^{x+y} e^{x+y+z} dz dy dx$$

(ii) Find the area of a loop of the curve $r = a \sin 3\theta$

वक्र $r = a \sin 3\theta$ के एक लूप का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

- 12) (i) Find the surface area and volume of the solid generated by revolution of the curve cardioid $r = a(1 + \cos \theta)$ about the initial line.

हृदयाम $r = a(1 + \cos \theta)$ से जनित ठोस आकृति का पृष्ठीय क्षेत्रफल और आयतन ज्ञात कीजिए जब यह आरम्भिक रेखा के परितः परिक्रमण करता हो।

- (ii) Find whether the following series is convergent or divergent :
ज्ञात कीजिए कि निम्नलिखित श्रेणी अभिसारी है या अपसारी है :

$$x + \frac{2^2 x^2}{2!} + \frac{3^3 x^3}{3!} + \frac{4^4 x^4}{4!} + \text{-----}$$

- 13) (i) Prove that (सिद्ध कीजिए)

$$\text{a) } \int_0^\infty e^{-ax} x^{n-1} \sin bx \, dx = \frac{\sqrt{(n)}}{(a^2 + b^2)^{n/2}} \sin n\theta$$

$$\text{b) } \int_0^\infty e^{-ax} x^{n-1} \cos bx \, dx = \frac{\sqrt{(n)}}{(a^2 + b^2)^{n/2}} \cos n\theta$$

Where (जहाँ) $\theta = \tan^{-1} (b/a)$

- (ii) Expand the polynomial $f(x) = 2x^3 + 7x^2 + x - 1$ in power of $(x-2)$.

$f(x) = 2x^3 + 7x^2 + x - 1$ का $(x-2)$ की घातों में प्रसार करो।