MSCPH-01

June - Examination 2016

MSc (Previous) Physics Examination

Mathematical Physics and Classical Mechanics

गणितीय भौतिकी तथा चिरसम्मत यांत्रिकी

Paper - MSCPH-01

Time : 3 Hours] **[Max. Marks :- 80**

Note: The question paper is divided into three sections A, B and C. Write answer as per the given instructions. Check Your paper code and paper title before starting the paper. You are allowed to use non-programmable scientific calculator, however sharing of calculators is not allowed.

निर्देश : यह प्रश्न पत्र 'अ' 'ब' और 'स' तीन खण्डों में विभाजित है। प्रत्येक खण्ड के निर्देशानुसार प्रश्नों के उत्तर दीजिए। प्रश्न पत्र शुरू करने से पूर्व प्रश्न पत्र कोड व प्रश्नपत्र शीर्षक जाँच ले। आपको बिना प्रोगामिंग वाले साइन्सथिफिक केलकुलेटर के उपयोग की अनुमति है परन्तु केलकुलेटर के हस्तान्तरण की अनुमति नहीं है।

Section - A **8 × 2 = 16**

Very Short Answer Type Questions (Compulsory)

Note: Answer **all** questions. As per the nature of the question delimit your answer in one word, one sentence or maximum upto 30 words. Each question carries 2 marks.

खण्ड – 'अ'

अति लघु उत्तर वाले प्रश्न (अनिवार्य)

निर्देश : सभी प्रश्नों के उत्तर दीजिए। अपने उत्तर को प्रश्नानुसार एक शब्द, एक वाक्य या अधिकतम 30 शब्दों में परिसीमित कीजिए। प्रत्येक प्रश्न दो अंकों का है।

1) (i) Lagrangian of a free particle in spherical polar coordinates is $L = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\dot{\phi}^2\sin^2\theta\right)$. The quantity that is conserved is

(a) $\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}$ (b) $\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}$ (c) $\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}}$ (d) $\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} + \dot{r}\,\dot{\theta}$

एक मुक्त कण का लेगरेंजियन गोलीय निर्देशांक में होता है, $L = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2 + r^2\dot{\phi}^2\sin^2\theta\right)$ संरक्षित राशि निम्न में से होगी।

(a) $\frac{\partial L}{\partial \dot{r}}$ (b) $\frac{\partial L}{\partial \dot{\theta}}$ (c) $\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}}$ (d) $\frac{\partial L}{\partial \dot{\phi}} + \dot{r}\,\dot{\theta}$

(ii) For what value of the parameter α, the following transformation is canonical?

$Q = q\cos\alpha - p\sin\alpha$

$P = q\sin\alpha + p\cos\alpha$

पैरामीटर α के किस मान के लिए निम्न रुपांतरण केनोनिकल होगी?

$Q = q\cos\alpha - p\sin\alpha$

$P = q\sin\alpha + p\cos\alpha$

(iii) Find the Fourier transform of $f(t) = k$ for $O < t < a$ and $f(t) = 0$, otherwise.

फलन $f(t) = k$ यदि $O < t < a$ अन्यथा $f(t) = 0$. इस फलन का फुरिए रूपान्तर ज्ञात करो।

(iv) Find the Laplace transform of function $f(t) = at^2 + bt^3 + c$

फलन $f(t) = at^2 + bt^3 + c$ का लाप्लास रूपान्तर ज्ञात करो।

(v) Write the Bessel's differential equation.

बैसिल के अवकलन समीकरण को लिखें।

(vi) $\frac{d}{dx}\left(J_0(x)\right)$ is, where $J_0(x)$ is Bessel function

(a) $J_1(x)$ (b) $-J_1(x)$ (c) $J_1'(x)$ (d) $-J_1'(x)$

$\frac{d}{dx}\left(J_0(x)\right)$ का मान क्या होगा, यहाँ $J_0(x)$ पर एक बैसल फलन है?

(a) $J_1(x)$ (b) $-J_1(x)$ (c) $J_1'(x)$ (d) $-J_1'(x)$

(vii) How do the components of a contravariant tensor of the second rank, A^{ik}, transform under coordinate transformation? Write the law.

द्वितीय कोटि के कोंन्ट्रावेरिअंत टेंसर A^{ik} के घटक कोर्डिनेट रूपान्तरण के अन्तर्गत किस प्रकार रुपान्तरित होते हैं। इस नियम को लिखें।

(viii) State trapezoid formula (trapezoid rule) for numerical integration.

सांख्यिक इन्टिग्रेशन के लिए ट्रेपेजोइडल सूत्र लिखें।

Section - B $4 \times 8 = 32$

(Short Answer Questions)

Note: Answer **any four** questions. Each answer should be given in 200 words. Each question carries 8 marks.

(खण्ड – ब)

(लघुत्तरात्मक प्रश्न)

निर्देश : किन्हीं चार प्रश्नों के उत्तर दीजिए। आपको अपने उत्तर को अधिकतम 200 शब्दों में परिसीमित कीजिए। प्रत्येक प्रश्न 8 अंकों का है।

2) Derive the Rodrigues' formula for the Legender polynomials.

$$P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n$$

लेजेंड्री पोलिनोमियल्स के लिए रोड्रीग्स के सूत्र $P_n(x) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{dx^n} (x^2 - 1)^n$ को स्थापित करें।

3) Prove the relation related to Bessel functions.

$J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x) = 2J_n'(x)$ and hence prove the relation

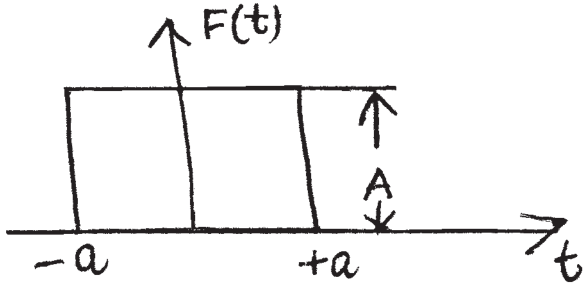
and hence prove the relation $J_0'(x) = -J_1(x)$

बैसिल फंक्शन से संबंधित निम्न संबंध सिद्ध करे।

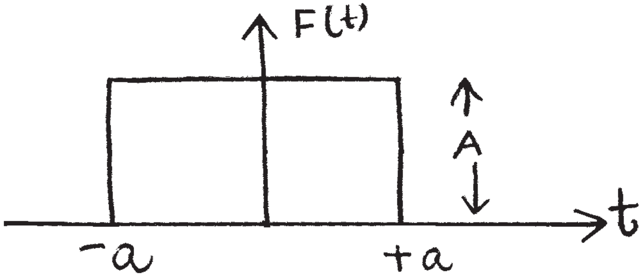
$J_{n-1}(x) - J_{n+1}(x) = 2J_n'(x)$ अतः निम्न संबंध प्राप्त करें

$2J_0'(x) = -J_1(x)$

4) Find the Fourier transformer of the function F(t) shower in the figure given below:



निम्न चित्र में दिए हुए फक्शन $F(t)$ का फूरिए रूपान्तरण ज्ञात करें।



5) The Lagrangian of a particle of mass m moving in one dimension is, $L = e^{\alpha t}\left[\frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{kx^2}{2}\right]$ where α and k are positive constants. Show that the equation of motion of the particle is

$$\ddot{x} + \alpha\,\dot{x} + \frac{k}{m}\,x = 0$$

एक कण जिसका द्रव्यमान है तथा एक विभीय गतिमान है। कण का लेगरेंजिअन निम्न है, $L = e^{\alpha t}\left[\frac{m\dot{x}^2}{2} - \frac{kx^2}{2}\right]$ यहाँ पर α तथा k धनात्मक नियतांक हैं। सिद्ध करो कि कण की गति का समीकरण $\ddot{x} + \alpha\,\dot{x} + \frac{k}{m}\,x = 0$ है।

6) Show that the transformation $Q = \sqrt{2q}\, e^{\alpha} \cos p$

$P = \sqrt{2q}\, e^{-\alpha} \sin p$, is canonical.

सिद्ध कीजिए कि निम्न रुपांतरण $Q = \sqrt{2q}\, e^{\alpha} \cos p$

$P = \sqrt{2q}\, e^{-\alpha} \sin p$, कैनोनिकल है।

7) Solve harmonic oscillator problem by Hamilton-Jacobi method.

हेमिल्टन – जेकोबी विधि द्वारा सरल आवर्त दोलित्र के लिए हल प्राप्त करे।

8) Find a real root of the equation $x\, e^{x} - 1 = 0$ using Newton-Raphson method, where $e = 2.7182818$.

समीकरण $x\, e^{x} - 1 = 0$ का वास्तविक मूल न्यूटन रेफसन विधि द्वारा ज्ञात करो, जहाँ $e = 2.7182818$.

9) Obtain the Lagrangian of a free particle in spherical polar coordinates.

एक मुक्त का लेगरेंजियन की गोलिय निर्देशांकों में प्राप्त कर लिखें।

Section - C $\qquad 2 \times 16 = 32$

(Long Answer Questions)

Note: Answer **any two** questions. You have to delimit your each answer maximum 500 words. Each question carries 16 marks.

(खण्ड – स)

(दीर्घ उत्तरीय प्रश्न)

निर्देश : किन्हीं दो प्रश्नों के उत्तर दीजिए। आप अपने उत्तर को अधिकतम 500 शब्दों में परिसीमित कीजिए। प्रत्येक प्रश्न 16 अंकों का है।

10) (i) Write the law of transformation of a contravariant tensor of second rank under coordinate transformation. Also write the law of transformation of covariant tensor of second rank.

(ii) Find inverse Laplace transform of $\frac{s^2 + s + 1}{s^3}$

(iii) Show that the Fourier sine and cosine transforms of e^{-at} are

$$g_s(w) = \frac{2}{\pi} \frac{w}{w^2 + a^2}$$

$$g_c(w) = \frac{2}{\pi} \frac{a}{w^2 + a^2}$$

(i) द्वितीय कोटि के कोंट्रावेरिएंट टेंसर का कोर्डिनेट ट्राँसफोर्मेसन के अन्तर्गत नियम लिखे। 'कोवेरिएंट टेन्सर (द्वितीय कोटि) के लिये भी कोर्डिनेट ट्राँसफोर्मेसन के अन्तर्गत रूपान्तरण नियम लिखे।

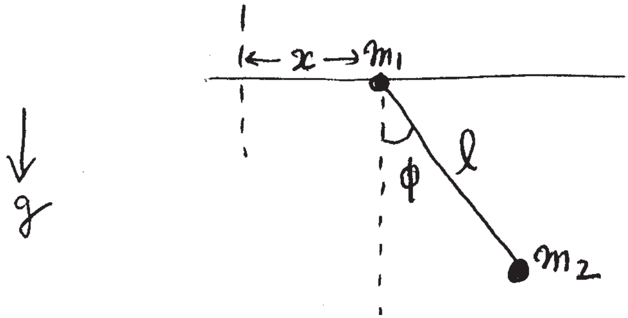
(ii) फलन $\frac{s^2 + s + 1}{s^3}$ के लिये व्युत्क्रम लाप्लास रूपान्तर ज्ञात करो।

(iii) सिद्ध करो कि फलन e^{-at} का फूरिये ज्या तथा फूरिये कोज्या रूपान्तर निम्न है:

$$g_s(w) = \frac{2}{\pi} \frac{w}{w^2 + a^2}$$

$$g_c(w) = \frac{2}{\pi} \frac{a}{w^2 + a^2}$$

11) (i) Find the Lagrangian for a system in which bob of simple pendulum of mass m_2, with a mass m_1 at the point of support which can move on a horizontal line in the plane in which m_2 moves (see figure). The system is placed in a uniform gravitational field (acceleration $\vec{g}$), length of massless string is l as shown in figure.



Show that the Lagrangian is

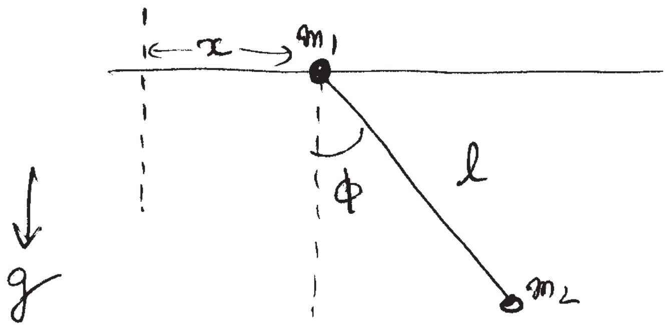
$$L = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m_2\left(l^2\dot{\phi}^2 + 2l\dot{x}\dot{\phi}\cos\phi\right) + m_2 gl\cos\phi$$

(ii) Let $f(p, q, t)$ be some function of coordinates, momenta and time. Show that its total time derivative is

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + [H, f]$$

where $[H, f] \equiv \sum_{R}\left(\frac{\partial H}{\partial p_k}\frac{\partial f}{\partial q_k} - \frac{\partial H}{\partial q_k}\frac{\partial f}{\partial p_k}\right)$ is the Poisson bracket of the quantities H and f.

(i) एक सरल लोलक जिसके गुमटे की संहति m_2 है तथा जिसके आलम्बन बिन्दु पर m_1 द्रव्यमान का कण है, तो इस सरल लोलक, जिसकी लम्बाई l है, का लेगरेंजियन ज्ञात करें। m_1 कण चित्रानुसार दिखाई क्षैतिज रेषा के अनुसार गति कर सकता है। निकाय एक गुरूत्व क्षेत्र (त्वरण $\vec{g}$) में गतिमान है।



सिद्ध करें कि लेगरेंजियन निम्न हैः

$$L = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)\dot{x}^2 + \frac{1}{2}m_2\left(l^2\dot{\phi}^2 + 2l\dot{x}\dot{\phi}\cos\phi\right) + m_2 gl\cos\phi$$

(ii) माना कि कोई फलन $f(p, q, t)$ संवेग p, कोर्डिनेट q, तथा समय t पर निर्भर करता है। सिद्ध करें कि इस फलन का समय के साथ पूर्ण अवकलन निम्न समीकरण से दिया जाता है;

$$\frac{df}{dt} = \frac{\partial f}{\partial t} + [H, f]$$

जहाँ पर $[H, f] \equiv \sum_R \left(\frac{\partial H}{\partial p_k}\frac{\partial f}{\partial q_k} - \frac{\partial H}{\partial q_k}\frac{\partial f}{\partial p_k} \right)$

राशि H तथा f का पोइशाँ ब्रेकेट प्रदर्शित करता है।

12) The Hermite equation is $y'' - 2xy' + 2ny = 0$

(i) Show that an Hermite polynomial

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}$$

satisfies this equation,

(ii) Show that $H_n(x)$ can be expanded as

$$H_n(x) = (2x)^n - \frac{n(n-1)}{1}(2x)^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2}(2x)^{n-4} + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

(iii) Write $H_0(x), H_1(x), H_2(x), H_3(x)$

(iv) Show that the normalization integral is

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n^2(x)\, dx = 2^n\, n!\, \sqrt{\pi}$$

हर्माइट समीकरण निम्न हैः $y'' - 2xy' + 2ny = 0$

(i) सिद्ध करें कि हर्माइट पोलीनोमिअल

$$H_n(x) = (-1)^n e^{x^2} \frac{d^n}{dx^n} e^{-x^2}$$

हर्माइट समीकरण को संतुष्ट करता है।

(ii) सिद्ध करो कि $H_n(x)$ का विस्तार निम्न है;

$$H_n(x) = (2x)^n - \frac{n(n-1)}{1}(2x)^{n-2} + \frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{1.2}(2x)^{n-4} + \ldots\ldots\ldots\ldots$$

(iii) $H_0(x), H_1(x), H_2(x), H_3(x)$ का मान लिखें।

(iv) सिद्ध करें कि नोरमेलाइजेशन इन्टिग्रल निम्न है:

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} H_n^2(x)\, dx = 2^n\, n!\, \sqrt{\pi}$$

13) Find the Laplace transform of the following function for (A), (B) and (C) and inverse Laplace transform for part (D).

(A) $f(t) = \sin at \cosh bt$

you can use property $L\left\{e^{\alpha t} \sin \beta t\right\} = \dfrac{\beta}{(s-\alpha)^2 + \beta^2}$

(B) $f(t) = e^{-2t} \cos^2 t$

you can use property $L\left\{e^{\alpha t} \cos \beta t\right\} = \dfrac{s-\alpha}{(s-\alpha)^2 + \beta^2}$

(C) $f(t) = \begin{cases} \sin\left(t - \dfrac{\pi}{3}\right); & t \geqslant \dfrac{\pi}{3} \\ 0 & ; t < \dfrac{\pi}{3} \end{cases}$

(D) Find Inverse Laplace transform of $\dfrac{s^2 + s + 1}{s^3}$

भाग (A), (B), (C), के लिये लाप्लास रूपांतर तथा भाग (D) के लिये व्युत्क्रम लाप्लास रुपान्तर ज्ञात करो।

(A) फलन $f(t) = \sin$ at cash bt

आप $L\left\{e^{\alpha t}\sin\beta t\right\} = \dfrac{\beta}{(s-\alpha)^2+\beta^2}$ का उपयोग कर सकते हैं।

(B) फलन $f(t) = e^{-2t}\cos^2 t$

आप $L\left\{e^{\alpha t}\cos\beta t\right\} = \dfrac{s-\alpha}{(s-\alpha)^2+\beta^2}$

(C) $f(t) = \begin{cases} \sin\left(t-\dfrac{\pi}{3}\right); & t \geqslant \dfrac{\pi}{3} \\ 0 & ; t < \dfrac{\pi}{3} \end{cases}$

(D) फलन $\dfrac{s^2+s+1}{s^3}$ के लिए व्युत्क्रम लाप्लास रूपान्तर ज्ञात करो।