

B.A./ B.Sc. Part-I Examination, June 2015
MATHEMATICS
Second Paper/Calculus MT-02)
Time Allowed : 3 Hours
Maximum Marks: 67

- (ii). Find the intrinsic equation of the asteroïd $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$, when s is measured :
 (a) from the cusp on the axis of x .
 (b) from the vertex.

एस्टाईड का $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ अक्ष पर कस्य से मापा गया हो
 (a) x -अक्ष पर कस्य से
 (b) शीर्ष से

Note:- The Question paper is divided into three sections A, B, and C. Use of calculator is allowed in this paper.

नोट:- प्रश्न पत्र तीन खण्डों ए, बी, और सी में विभाजित है | इस प्रश्नपत्र में कैल्कुलेटर के उपयोग की अनुमति है।

Section - A (खण्ड 'ए')

Section 'A' contain seven (07) Very Short Answer Type Questions. Examinees have to attempt all questions. Each question is of 01 marks and maximum word limit is thirty words.

खण्ड 'ए' में सात (07) अल्पसुत्तरात्मक प्रश्न हैं, परीक्षार्थियों को सभी प्रश्नों को हल करना है। प्रत्येक प्रश्न के 01 अंक हैं और अधिकतम शब्द सीमा तीस शब्द है।

1. (i). What is the condition of concavity of a curve with respect to y -axis.

किसी वक्र के y -अक्ष के सापेक्ष अवतल होने का प्रतिबन्ध लिखिए।

- (ii). Write the condition of double point of the $f(x, y) = 0$

वक्र $f(x, y) = 0$ में द्विक बिन्दु विद्यमान होने का प्रतिबन्ध लिखिए।

- (iii). Write the degree and order of the following differential equation.

नीचे गई अवकल समीकरण की घात तथा कोटि लिखिए।

$$x^2 \frac{d^2 y}{dx^2} + 5 \left(\frac{dy}{dx} \right)^2 + 1 = 0$$

- (iv). Write the n^{th} term of the series

निम्न श्रेणी का n^{th} पद लिखिए।

$$x + \frac{2^2 x^2}{2!} + \frac{3^3 x^3}{3!} + \frac{4^4 x^4}{4!} + \dots$$

- (v). Write the formula of radius of curvature for polar curve.

ध्रुवीय वक्र के लिए वक्र की वक्रता त्रिज्या का सूत्र लिखिए।

- (vi). Write the formula of beta function.

बीटा फलन का सूत्र लिखिए।

- (vii). What is the degree of homogeneous function of the following

निम्न समघात फलन की घात लिखिए।

$$f(x, y) = \frac{x^{1/4} + y^{1/4}}{x^{1/5} + y^{1/5}}$$

Section -B (खण्ड 'ब')

Section 'B' contain Eight Short Answer Type Questions. Examinees will have to answer any four (04) questions. Each question is of 08 marks. Examinees have to delimit each answer in maximum 200 words.

खण्ड 'ब' में आठ लघु उत्तर प्रकार के प्रश्न हैं, परीक्षार्थियों को कीन्हीं भी चार (04) सवालों के जवाब देना है। प्रत्येक प्रश्न 08 अंक का है। परीक्षार्थियों को अधिकतम 200 शब्दों में प्रत्येक जवाब परिसीमित करने है।

2. Find the envelop of the family of the curve $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{k^2 - a^2} = 1$ where a is parameter

वक्र कुल $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{k^2 - a^2} = 1$ का अन्वलाप ज्ञात कीजिए, a प्राचल है।

3. Find the pedal equation of the following curve
वक्र $x^2 + y^2 - 2ax = 0$ का पदिक समीकरण ज्ञात कीजिए।

4. Test convergence and absolute convergence of the following series:
निम्न श्रेणी के अभिसरण तथा निरपेक्ष अभिसरण की जाँच कीजिए।

$$\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} \frac{1}{n^a}$$

5. Find the whole length of the cycloid $x = a(\theta - \sin \theta)$, $y = a(1 - \cos \theta)$, $(0 \leq \theta \leq 2\pi)$
चक्र $x = a(\theta - \sin \theta)$, $y = a(1 - \cos \theta)$, $(0 \leq \theta \leq 2\pi)$ की सम्पूर्ण लम्बाई ज्ञात कीजिए।

6. Find the value
मान ज्ञात कीजिए।

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} (x^2 + y^2 + z^2) dx dy dz$$

7. If $z(x+y) = x^2 + y^2$ then prove that
यदि $z(x+y) = x^2 + y^2$ तो सिद्ध कीजिए कि

$$\left(\frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} \right)^2 = 4 \left(1 - \frac{\partial z}{\partial x} - \frac{\partial z}{\partial y} \right)$$

8. Show that the volume of the solid generated by the revolution of the following tractrix about its asymptotes is $\left(\frac{2}{3}\right)\pi a^3$
प्रदर्शित कीजिए कि निम्न ट्रैक्टरी का अपने अनन्त स्पर्शों के पारितः परिक्रमण से जनित्र आयतन $\left(\frac{2}{3}\right)\pi a^3$ है।

$$x = a \left(\cos t + \frac{1}{2} \log \tan^2 \frac{1}{2} t \right), y = a \sin t$$

9. Solve the following Differential equation
दी गई अवकल समीकरण को हल कीजिए।

$$x \sin \left(\frac{y}{x} \right) dy = \left[y \sin \left(\frac{y}{x} \right) - x \right] dx$$

Section -C (खण्ड 'स')

Section 'C' contain 4 Long Answer Type Questions. Examinees will have to answer any two (02) questions. Each question is of 14 marks. Examinees have to delimit each answer in maximum 500 words.

खण्ड 'स' में 4 निम्नप्रकार के प्रश्न हैं। परीक्षार्थियों को कीन्हीं भी दो (02) सवालों के जवाब देना है। प्रत्येक प्रश्न 14 अंकों का है। परीक्षार्थियों को अधिकतम 500 शब्दों में प्रत्येक जवाब परिसीमित करने है।

10. (i) Prove that for the ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, $\rho = \frac{a^2 b^2}{p^3}$, where p is the centre upon the tangent at (x, y) and ρ is a radius of curvature at the point (x, y) .

सिद्ध करो कि दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ के लिये $\rho = \frac{a^2 b^2}{p^3}$ जहाँ p किसी बिन्दु (x, y) पर वक्रता त्रिज्या है व ρ बिन्दु (x, y) पर खींची गई स्पर्श रेखा पर केन्द्र से डाले गये लम्ब की लम्बाई है।

(ii) One corner of a long rectangular paper of width 1 meter is folded so as to reach the opposite edge of the paper. Find the minimum length of the crease.
एक लम्बे आयताकार कागज की चौड़ाई 1 मीटर है। इसके एक कोने को इतना मोड़ा गया कि वह कागज के कोरे तक पहुँच जाए। अब इस प्रकार बन्दे वाले सिलवट की न्यूनतम लम्बाई क्या होगी।

11. (i) Find the equation of the curve whose intrinsic equation $s = c \tan \psi$ given $\psi = 0$ on $x = 0$ and $y = c$.
जब वक्र का स्पर्शकण प्राग कीजिए जिसका ढेज समीकरण $s = c \tan \psi$ जबकि $\psi = 0$ पर $x = 0$ तथा $y = c$ दिया हुआ है।

(ii) Find the area of the cardioids $r = a(1 + \cos \theta)$ when curve is symmetric about the initial line.
कार्डिआइड $r = a(1 + \cos \theta)$ से घिरा हुआ क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए जब वक्र प्रारम्भिक रेखा के समोक्ष सममित है।

12. (i) Show that the series $x^2 (\log 2)^x + x^3 (\log 3)^x + x^4 (\log 4)^x + \dots$ is convergent if $x < 1$ and divergent if $x \geq 1$
प्रदर्शित कीजिए कि श्रेणी $x^2 (\log 2)^x + x^3 (\log 3)^x + x^4 (\log 4)^x + \dots$ अभिसारी है यदि $x < 1$ तथा अपसारी है यदि $x \geq 1$

(ii) If $u = \log(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz)$ then prove that
(ii) If $u = \log(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz)$ तो सिद्ध कीजिए कि

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \right) u = -\frac{9}{(x+y+z)^2}$$

13. (i) Evaluate the following integral with the help of Dirichleies integral
नीचे दिये समाकलन का मान दिरिक्लेट समाकलन की सहायता से ज्ञात कीजिए।

$$\iiint_V x^2 y dx dy dz$$

Where the region V is volume which is bounded following planes $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y = z = 1$
जहाँ क्षेत्र V निम्न तलों से घेरबद्ध आयतन है $x = 0$, $y = 0$, $z = 0$, $x + y = z = 1$