

MT-08

June – Examination 2024

B.A./B.Sc. (Part III) Examination

MATHEMATICS

(Complex Analysis)

Paper : MT-08

Time : 3 Hours]

[Maximum Marks : 47

Note :- The question paper is divided into three Sections 'A', 'B' and 'C'. Write answers as per the given instructions. Use of non-programmable scientific calculator is allowed in this paper.

निर्देश :- यह प्रश्न-पत्र 'अ', 'ब' और 'स' तीन खण्डों में विभाजित है। प्रत्येक खण्ड के निर्देशानुसार प्रश्नों के उत्तर दीजिए। इस प्रश्न-पत्र में नॉन-प्रोग्रामेबल साइंटिफिक कैलकुलेटर के उपयोग की अनुमति है।

Section-A

7×1=7

(Very Short Answer Type Questions)

Note :- Answer all questions. As per the nature of the question delimit your answer in one word, one sentence or maximum up to **30** words. Each question carries 1 mark.

MT-08/8

(1)

TT-298 Turn Over

खण्ड—अ

(अति लघु उत्तरीय प्रश्न)

निर्देश :- सभी प्रश्नों के उत्तर दीजिए। आप अपने उत्तर को प्रश्नानुसार एक शब्द, एक वाक्य या अधिकतम **30** शब्दों में परिसीमित कीजिए। प्रत्येक प्रश्न 1 अंक का है।

1. (i) Represent number $-5 + 5i$ in polar form.

समिश्र संख्या $-5 + 5i$ को ध्रुवीय रूप में निरूपित कीजिए।

(ii) Define Convergent Sequence.

अभिसारी अनुक्रम को परिभाषित कीजिए।

(iii) Prove that function $u = \cos x \cdot \cosh y$ is harmonic.

सिद्ध कीजिए कि फलन $u = \cos x \cdot \cosh y$ प्रसंवादी है।

MT-08/8

(2)

TT-298

(iv) Find value of z for which mapping

$$w = \left(z + \frac{1}{z} \right) \text{ is not conformal mapping.}$$

z का वह मान ज्ञात कीजिए जिसके लिए प्रतिचित्रण

$$w = \left(z + \frac{1}{z} \right) \text{ अनुकोण प्रतिचित्रण नहीं है।}$$

(v) State Cauchy's Inequality.

कोशी असमिका का कथन लिखिए।

(vi) State Liouville's Theorem.

ल्यूवेल प्रमेय का कथन कीजिए।

(vii) Define Removable Singularity.

अपनेय विचित्रता को परिभाषित कीजिए।

Section-B

4×5=20

(Short Answer Type Questions)

Note :- Answer any *four* questions. Each answer should not exceed **200** words. Each question carries 5 marks.

खण्ड—ब

(लघु उत्तरीय प्रश्न)

निर्देश :- किन्हीं चार प्रश्नों के उत्तर दीजिए। आप अपने उत्तर को अधिकतम **200** शब्दों में परिसीमित कीजिए। प्रत्येक प्रश्न 5 अंक का है।

2. Show that the function :

$$f(z) = u + iv$$

where :

$$f(z) = \frac{x^3(1+i) - y^3(1-i)}{x^2 + y^2} \quad (z \neq 0),$$

$$f(0) = 0$$

is continuous and that the Cauchy-Riemann equations are satisfied at the origin. Yet $f'(0)$ does not exist.

दर्शाइए कि फलन

$$f(z) = u + iv$$

जहाँ :

$$f(z) = \frac{x^3(1+i) - y^3(1-i)}{x^2 + y^2} \quad (z \neq 0),$$

$$f(0) = 0$$

संतत है तथा मूल बिन्दु पर कोशी-रीमान समीकरण संतुष्ट होती है। यद्यपि $f'(0)$ का अस्तित्व मूल बिन्दु पर नहीं है।

3. Find bilinear transformation that maps the points $z = 0, i, \infty$ into $w = \infty, i, 0$ respectively.

वह द्विरैखिक रूपान्तरण ज्ञात कीजिए, जो बिन्दुओं $z = 0, i, \infty$ को $w = \infty, i, 0$ में प्रतिचित्रित करे।

4. Find corresponding area of infinite strip $\frac{1}{4} < y < \frac{1}{2}$ under the transformation $w = \frac{1}{z}$.

रूपान्तरण $w = \frac{1}{z}$ के अन्तर्गत अनन्त पट्टी $\frac{1}{4} < y < \frac{1}{2}$ का w समतल में समवर्ती क्षेत्र ज्ञात कीजिए।

5. State and prove Cauchy's Integral Formula.

कोशी समाकल सूत्र को कथन कर सिद्ध कीजिए।

6. State and prove Liouville's Theorem.

ल्यूवेल प्रमेय का कथन कर सिद्ध कीजिए।

7. Describe various types of Singularities.

विचित्रताओं के विभिन्न प्रकारों की विवेचना कीजिए।

8. Prove that polynomial $z^5 + z^3 + 2z + 3$ has only one zero in first quadrant of complex plane.

सिद्ध कीजिए कि बहुपद $z^5 + z^3 + 2z + 3$ का सम्मिश्र तल के प्रथम चतुर्थांश में केवल एक ही शून्य है।

9. Prove by line integral :

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{a \cos \theta}{a + \cos \theta} d\theta = 2\pi a \left\{ 1 - \frac{a}{\sqrt{a^2 - 1}} \right\}, a > 1$$

परिरेखा समाकलन से सिद्ध कीजिए कि :

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{a \cos \theta}{a + \cos \theta} d\theta = 2\pi a \left\{ 1 - \frac{a}{\sqrt{a^2 - 1}} \right\}, a > 1$$

Section-C

2×10=20

(Long Answer Type Questions)

Note :- Answer any *two* questions. You have to delimit your each answer maximum up to **500** words.

Each question carries 10 marks.

खण्ड—स

(दीर्घ उत्तरीय प्रश्न)

निर्देश :- किन्हीं दो प्रश्नों के उत्तर दीजिए। आप अपने उत्तर को अधिकतम 500 शब्दों में परिसीमित कीजिए। प्रत्येक प्रश्न 10 अंक का है।

10. State and prove necessary and sufficient condition for $f(z)$ to be analytic.

विश्लेषिक फलन के लिए आवश्यक व पर्याप्त प्रतिबन्ध का कथन कर सिद्ध कीजिए।

11. State and prove Laurant's theorem for power series expansions of analytic function.

विश्लेषिक फलनों का घात श्रेणी के रूप में प्रसार के लिए लौराँ प्रमेय का कथन कर सिद्ध कीजिए।

12. Obtain expansion for function $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-3)}$,

which are valid for the regions :

- (a) $|z| < 1$
- (b) $1 < |z| < 3$ and
- (c) $|z| > 3$

निम्न क्षेत्र में फलन $f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-3)}$ का प्रसार ज्ञात

कीजिए :

- (अ) $|z| < 1$
- (ब) $1 < |z| < 3$ और
- (स) $|z| > 3$

13. Explain the following :

- (a) Analytic continuation along a chain of domains
- (b) Analytic continuation by a power series
- (c) Direct analytic continuation

निम्नलिखित को समझाइए :

- (अ) प्रान्तों की शृंखला के अनुदिश विश्लेषिक सांतत्य
- (ब) घात श्रेणी द्वारा विश्लेषिक सांतत्य
- (स) सीधा विश्लेषिक सांतत्य