

**MT-07**

**June – Examination 2024**

**B.A./B.Sc. (Part III) Examination**

**MATHEMATICS**

**(Algebra)**

**Paper : MT-07**

*Time : 3 Hours ]*

*[ Maximum Marks : 47*

**Note** :- The question paper is divided into three Sections A, B and C. Use of non-programmable scientific calculator is allowed in this paper.

**निर्देश** :- यह प्रश्न-पत्र 'अ', 'ब' और 'स' तीन खण्डों में विभाजित है। इस प्रश्न-पत्र में नॉन-प्रोग्रामेबल साइंटिफिक कैलकुलेटर के उपयोग की अनुमति है।

**Section-A**

**7×1=7**

**(Very Short Answer Type Questions)**

**Note** :- Answer all questions. As per the nature of the question delimit your answer in one word, one sentence or maximum up to 30 words. Each question carries 1 mark.

*MT-07/8*

( 1 )

**TT-297** Turn Over

**खण्ड—अ**

**(अति लघु उत्तरीय प्रश्न)**

**निर्देश** :- सभी प्रश्नों के उत्तर दीजिए। आप अपने उत्तर को प्रश्नानुसार एक शब्द, एक वाक्य या अधिकतम 30 शब्दों में परिसीमित कीजिए। प्रत्येक प्रश्न 1 अंक का है।

1. (i) Define subgroup.  
उपसमूह को परिभाषित कीजिए।
- (ii) Define integral domain.  
पूर्णाकीय प्रान्त को परिभाषित कीजिए।
- (iii) Define principal ideal.  
मुख्य गुणजावली को परिभाषित कीजिए।
- (iv) Define linear combination of vectors.  
सदिशों के एक घात संचय को परिभाषित कीजिए।
- (v) Define linear dependence of vectors.  
सदिशों की एकघाती आश्रितता को परिभाषित कीजिए।
- (vi) Define dimension of vector space.  
सदिश समष्टि की विमा को परिभाषित कीजिए।
- (vii) Define complementary subspace.  
पूरक उपसमष्टि को परिभाषित कीजिए।

*MT-07/8*

( 2 )

**TT-297**

**Section-B****4×5=20****(Short Answer Type Questions)**

**Note :-** Answer any *four* questions. Each answer should not exceed **200** words. Each question carries 5 marks.

**खण्ड-ब****(लघु उत्तरीय प्रश्न)**

**निर्देश :-** किन्हीं चार प्रश्नों के उत्तर दीजिए। आप अपने उत्तर को अधिकतम **200** शब्दों में परिसीमित कीजिए। प्रत्येक प्रश्न 5 अंक का है।

2. Show that the set of all matrices of the form :

$$A\alpha = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}, \alpha \in \mathbb{R}$$

is an abelian group for matrix multiplication.

सिद्ध कीजिए कि :

$$A\alpha = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}, \alpha \in \mathbb{R}$$

प्रकार की सभी मैट्रिसेज का समुच्चय मैट्रिक्स गुणा के लिए आबेली समूह है।

3. If the order of an element  $a$  of group  $G$  is  $n$ , then show that order of  $a^p$  is also  $n$  provided  $p$  and  $n$  are relatively prime.

यदि किसी समूह  $G$  में एक अवयव  $a$  की कोटि  $n$  हो तो सिद्ध कीजिए कि  $a^p$  को कोटि भी  $n$  होगी। यदि  $p$  और  $n$  सापेक्षिक अभाज्य हैं।

4. Show that the union of two subgroups is a subgroup if and only if one is contained in the other.

सिद्ध कीजिए कि दो उपसमूहों का संघ एक उपसमूह होता है यदि और केवल यदि एक उपसमूह दूसरे में अन्तर्विष्ट हो।

5. Show that the order of a finite cyclic group is equal to the order of its generator.

सिद्ध कीजिए कि एक परिमित चक्रीय समूह की कोटि उसके जनक की कोटि के बराबर होती है।

6. Show that the intersection of any *two* normal subgroups of a group is a normal subgroup.

सिद्ध कीजिए कि किसी समूह के किन्हीं दो प्रसामान्य उपसमूहों का सर्वनिष्ठ उस समूह का प्रसामान्य उपसमूह होता है।

7. Show that every permutation can be expressed as the product of disjoint cycles.

सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक क्रमचय असंयुक्त चक्रों के गुणनफल के रूप में व्यक्त किया जा सकता है।

8. Show that every field is a vector space over its subfield.

सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक क्षेत्र अपने उप क्षेत्र पर एक सदिश समष्टि होता है।

9. Show that every non empty subset of a linearly independent set of vectors is also linearly independent.

सिद्ध कीजिए कि सदिशों के एकघाती स्वतंत्र समुच्चय का प्रत्येक अरिक्त उपसमुच्चय भी एकघाती स्वतंत्र होता है।

**Section–C**

**2×10=20**

**(Long Answer Type Questions)**

*Note* :- Answer any *two* questions. You have to delimit your each answer maximum up to **500** words. Each question carries 10 marks.

**खण्ड—स**

**(दीर्घ उत्तरीय प्रश्न)**

**निर्देश** :- किन्हीं दो प्रश्नों के उत्तर दीजिए। आप अपने उत्तर को अधिकतम **500** शब्दों में परिसीमित कीजिए। प्रत्येक प्रश्न 10 अंक का है।

10. If for all elements  $a, b$  of a semi group  $G$ , equations  $ax = b$  and  $ya = b$  have unique solutions in  $G$ , then show that  $G$  is a group.

यदि किसी समि समूह  $G$  में प्रत्येक  $a, b \in G$  के लिए समीकरण  $ax = b$  तथा  $ya = b$  के हल अद्वितीय हों तो सिद्ध कीजिए कि  $G$  एक समूह होगा।

11. State and prove fundamental theorem of homomorphism.

समाकारिता की मूलभूत प्रमेय का कथन लिखकर सिद्ध कीजिए।

12. Show that the set of Gaussian integer  $J = \{a + ib/a, b \in z\}$  is a ring with respect to addition and multiplication of complex numbers.

Is it an integral domian ? Is it a field ?

सिद्ध कीजिए कि गाउसीय पूर्णाकों का समुच्चय  $J = \{a + ib/a, b \in z\}$  सम्मिश्र संख्याओं के योग एवं गुणन के लिए एक वलय है। क्या यह पूर्णाकीय प्रान्त है ? क्या यह एक क्षेत्र है ?

13. If  $w_1$  and  $w_2$  are two subspaces of a finite dimensional vector space  $V(F)$ , then show :

$$\dim (w_1 + w_2) = \dim w_1 +$$

$$\dim w_2 - \dim (w_1 \cap w_2)$$

यदि  $w_1$  और  $w_2$  एक परिमित विमीय सदिश समष्टि  $V(F)$

की दो उपसमष्टियाँ हों तो सिद्ध कीजिए :

$$\dim (w_1 + w_2) = \dim w_1 +$$

$$\dim w_2 - \dim (w_1 \cap w_2)$$