

**MT-04**

**June – Examination 2024**

**B.A./B.Sc. (Part II) Examination**

**MATHEMATICS**

**(Real Analysis and Metric Space)**

**Paper : MT-04**

*Time : 3 Hours ]*

*[ Maximum Marks : 47*

**Note** :- The question paper is divided into three Sections A, B and C. Write answers as per the given instructions.

**निर्देश** :- यह प्रश्न-पत्र 'अ', 'ब' और 'स' तीन खण्डों में विभाजित है। प्रत्येक खण्ड के निर्देशानुसार प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

**Section-A**

**7×1=7**

**(Very Short Answer Type Questions)**

**Note** :- Answer all questions. As per the nature of the question delimit your answer in one word, one sentence or maximum up to **30** words. Each question carries 1 mark.

*MT-04/7*

( 1 )

**TT-294** Turn Over

**खण्ड—अ**

**(अति लघु उत्तरीय प्रश्न)**

**निर्देश** :- सभी प्रश्नों के उत्तर दीजिए। आप अपने उत्तर को प्रश्नानुसार एक शब्द, एक वाक्य या अधिकतम **30** शब्दों में परिसीमित कीजिए। प्रत्येक प्रश्न 1 अंक का है।

1. (i) Define Closed Set.

संवृत समुच्चय को परिभाषित कीजिए।

(ii) Define Riemann Integration.

रीमान समाकलन को परिभाषित कीजिए।

(iii) Define a compact set in metric space.

दूरीक समष्टि में संहत समुच्चय को परिभाषित कीजिए।

(iv) Define limit point and limit of sequence.

अनुक्रम की सीमा एवं सीमा बिन्दु को परिभाषित कीजिए।

(v) Define a metric space.

एक दूरीक समष्टि को परिभाषित कीजिए।

*MT-04/7*

( 2 )

**TT-294**

(vi) Define Darboux space.

डारबू योग को परिभाषित कीजिए।

(vii) Define Uniform Convergence of sequences of functions.

फलनों के अनुक्रम का एकसमान अभिसरण को परिभाषित कीजिए।

**Section-B**

**4×5=20**

**(Short Answer Type Questions)**

**Note** :- Answer any *four* questions. Each answer should not exceed **200** words. Each question carries 5 marks.

**खण्ड—ब**

(लघु उत्तरीय प्रश्न)

**निर्देश** :- किन्हीं **चार** प्रश्नों के उत्तर दीजिए। आप अपने उत्तर को अधिकतम **200** शब्दों में परिसीमित कीजिए। प्रत्येक प्रश्न 5 अंक का है।

MT-04/7

( 3 )

**TT-294** Turn Over

2. Prove that the union of an arbitrary family of open set is an open set.

सिद्ध कीजिए कि विवृत्त समुच्चयों के प्रत्येक समुदाय का संघ भी एक विवृत्त समुच्चय होता है।

3. Prove that  $\sqrt{2}$  is an irrational number.

सिद्ध कीजिए कि  $\sqrt{2}$  एक अपरिमेय संख्या है।

4. Prove that every Cauchy sequence is bounded.

सिद्ध कीजिए प्रत्येक कोशी अनुक्रम परिबद्ध होता है।

5. Show that the following function  $f$  is continuous but not differentiable at  $x = 0$  :

सिद्ध कीजिए कि निम्न फलन  $f$  बिन्दु  $x = 0$  पर संतत है किन्तु अवकलनीय नहीं है :

$$f(x) \begin{cases} x \sin(1/x) & x \neq 0 \\ 0 & x = 0 \end{cases}$$

MT-04/7

( 4 )

**TT-294**

6. Prove that every continuous function is R-integrable.

सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक संतत फलन R-समाकलनीय होता है।

7. Prove that the following function  $f$  is continuous at the point  $(1, 2)$  :

सिद्ध कीजिए कि निम्न फलन  $f$  बिन्दु  $(1, 2)$  पर संतत है :

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 + 4y & (x, y) \neq (1, 2) \\ 0 & (x, y) = (1, 2) \end{cases}$$

8. Prove that a subset  $S$  of a metric space  $X$  is closed iff  $\bar{S} = S$ .

सिद्ध कीजिए कि किसी दूरीक समष्टि  $X$  का कोई उपसमुच्चय  $S$  संवृत होता है, यदि और केवल यदि  $\bar{S} = S$ ।

9. Prove that the continuous image of a compact set is compact.

सिद्ध कीजिए कि संहत समुच्चय का संतत प्रतिबिम्ब संहत होता है।

Section-C

2×10=20

(Long Answer Type Questions)

*Note* :- Answer any *two* questions. You have to delimit your each answer maximum up to **500** words. Each question carries 10 marks.

खण्ड—स

(दीर्घ उत्तरीय प्रश्न)

**निर्देश** :- किन्हीं दो प्रश्नों के उत्तर दीजिए। आप अपने उत्तर को अधिकतम **500** शब्दों में परिसीमित कीजिए। प्रत्येक प्रश्न 10 अंक का है।

10. Prove that if a function  $f$  is continuous in  $[a, b]$ , then it attains its supremum and infimum at least once in  $[a, b]$ .

सिद्ध कीजिए कि यदि फलन  $f$  संवृत अन्तराल  $[a, b]$  में संतत है, तो वह उस अन्तराल में कम से कम एक बार अपने उच्चक एवं निम्नक को ग्रहण करता है।

11. If  $f$  is defined on  $[0, a]$ ,  $a > 0$  as follows :

यदि फलन  $f$ ,  $[0, a]$ ,  $a > 0$  पर निम्न प्रकार परिभाषित है :

$$f(x) = x^2$$

Prove that :

सिद्ध कीजिए :

$$f \in R[0, a]$$

12. Test for uniform convergence the sequence  $\{f_n(x)\}$ ,

where  $f_n(x) = nx(1-x)^n$ , when  $0 \leq x \leq 1$ .

अनुक्रम  $\{f_n(x)\}$  का एकसमान अभिसारी के लिए परीक्षण कीजिए, जहाँ  $f_n(x) = nx(1-x)^n$ , जब  $0 \leq x \leq 1$ ।

13. Let the mapping  $d : R \times R \rightarrow R$  defined by :

माना कि प्रतिचित्रण  $d : R \times R \rightarrow R$  निम्न प्रकार परिभाषित है :

$$d(x, y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ 1 & x \neq y \end{cases} \quad \forall x, y \in R$$

Prove that  $(R, d)$  is a metric space.

सिद्ध कीजिए  $(R, d)$  एक दूरीक समष्टि है।