# MT–02

## June – Examination 2024

# B.A./B.Sc. (Part-I) Examination

## MATHEMATICS

## (Calculus and Differential Equations)

## Paper : MT-02

*Time : **3** Hours* ] [ *Maximum Marks : **47***

***Note*** :– The question paper is divided into three Sections A, B and C. Use of non-programmable scientific calculator is allowed in this paper.

**निर्देश :-** यह प्रश्न-पत्र 'अ', 'ब' और 'स' तीन खण्डों में विभाजित है। इस प्रश्न-पत्र में नॉन-प्रोग्रामेबल साइंटिफिक कैलकुलेटर के उपयोग की अनुमति है।

### Section–A 7×1=7

### (Very Short Answer Type Questions)

***Note*** :– Answer all questions. As per the nature of the question delimit your answer in one word, one sentence or maximum up to **30** words. Each question carries 1 mark.



### खण्ड–अ

### (अति लघु उत्तरीय प्रश्न)

**निर्देश :-** सभी प्रश्नों के उत्तर दीजिए। आप अपने उत्तर को प्रश्नानुसार एक शब्द, एक वाक्य या अधिकतम **30** शब्दों में परिसीमित कीजिए। प्रत्येक प्रश्न 1 अंक का है।

1. (i) Write Cauchy's $n$th root test.

कॉशी का $n$वां मूल परीक्षण लिखिए।

(ii) Write Rolle's theorem.

रौले का प्रमेय लिखिए।

(iii) If :

$$f(x,y)=\frac{x^4+y^4}{x^2-y^2}$$

then find the value of :

$$x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}$$

यदि $f(x,y)=\frac{x^4+y^4}{x^2-y^2}$ है तो $x\frac{\partial f}{\partial x}+y\frac{\partial f}{\partial y}$ को ज्ञात कीजिए।

(iv) Define rectification.

चापकलन को परिभाषित कीजिए।

(v) Find the value of the following double integration :

$$I = \int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} xy\,dx\,dy$$

निम्न द्वि-समाकल का मान ज्ञात कीजिए :

$$I = \int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} xy\,dx\,dy$$

(vi) Define Beta function.

बीटा फलन को परिभाषित कीजिए।

(vii) State Pappus' theorem.

पेपस के प्रमेय का कथन कीजिए।

**Section–B** **4×5=20**

**(Short Answer Type Questions)**

***Note*** :– Answer any *four* questions. Each answer should not exceed **200** words. Each question carries 5 marks.

**खण्ड—ब**

**(लघु उत्तरीय प्रश्न)**

**निर्देश :-** किन्हीं **चार** प्रश्नों के उत्तर दीजिए। आप अपने उत्तर को अधिकतम **200** शब्दों में परिसीमित कीजिए। प्रत्येक प्रश्न 5 अंक का है।



2. Test the convergence of the series :

$$x + \frac{2^2x^2}{\lfloor 2} + \frac{3^3x^3}{\lfloor 3} + \frac{4^4x^4}{\lfloor 4} + \ldots.$$

श्रेणी $x + \frac{2^2x^2}{\lfloor 2} + \frac{3^3x^3}{\lfloor 3} + \frac{4^4x^4}{\lfloor 4} + \ldots.$ के अभिसरण का परीक्षण कीजिए।

3. Find Pedal equation of the circle :

$$x^2 + y^2 - 2ax = 0$$

वृत्त $x^2 + y^2 - 2ax = 0$ का पदिक समीकरण ज्ञात कीजिए।

4. Find radius of curvature at any point P($x$, $y$) of ellipse :

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ के किसी बिन्दु P($x$, $y$) पर वक्रता त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

5. Find asymptotes of the following curve :

$$x^3 + 2x^2y - xy^2 - 2y^3 + xy - y^2 = 1$$

निम्न वक्र के अनन्तस्पर्शी ज्ञात कीजिए :

$$x^3 + 2x^2y - xy^2 - 2y^3 + xy - y^2 = 1$$

6. Find the area of loop of curve :

$$x(x^2 + y^2) = a\,(x^2 - y^2)$$

वक्र $x(x^2 + y^2) = a\,(x^2 - y^2)$ के लूप का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

7. Find the surface area of solid generated by revolving asteroid $x = a\,cos^3t$, $y = a\,\sin^3t$ about $x$-axis.

एस्टेरॉइड $x = a\,cos^3t$, $y = a\,\sin^3t$ को $x$-अक्ष के सापेक्ष घुमाने से बने ठोस का पृष्ठीय क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

8. Find the value of $\int\int_A ydxdy$ ; where A is the region of integration bounded by parabolas $y^2 = 4ax$ and $x^2 = 4ay$.

मान ज्ञात कीजिए $\int\int_A ydxdy$ जहाँ समाकलन का क्षेत्र A परवलय $y^2 = 4ax$ और $x^2 = 4axy$ से परिबद्ध है।

9. Solve :

$$\frac{dy}{dx} + x\sin^2 y = x^3\cos^2 y$$

हल कीजिए :

$$\frac{dy}{dx} + x\sin^2 y = x^3\cos^2 y$$



## Section–C 2×10=20

### (Long Answer Type Questions)

***Note*** :– Answer any *two* questions. You have to delimit your each answer maximum up to **500** words. Each question carries 10 marks.

### खण्ड—स

### (दीर्घ उत्तरीय प्रश्न)

**निर्देश :-** किन्हीं **दो** प्रश्नों के उत्तर दीजिए। आप अपने उत्तर को अधिकतम **500** शब्दों में परिसीमित कीजिए। प्रत्येक प्रश्न 10 अंक का है।

10. State and prove Taylor's theorem with Cauchy's form of remainder.

कॉशी रूप के शेष वाला टेलर प्रमेय का कथन कर सिद्ध कीजिए।

11. (a) If :

$$u = \sin^{-1}\left(\frac{x^2 + y^2}{x + y}\right)$$

then prove that :

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = \tan u$$

यदि :

$$u = \sin^{-1}\left(\frac{x^2 + y^2}{x + y}\right)$$

सिद्ध कीजिए :

$$x\frac{\partial u}{\partial x} + y\frac{\partial u}{\partial y} = \tan u$$

(b) If $f(x, y) = 2(x - y)^2 - x^4 - y^4$ then find the maximum or minimum values except some critical points.

यदि $f(x, y) = 2(x - y)^2 - x^4 - y^4$ हो तो संदिग्ध स्थितियाँ छोड़कर इसका उच्चिष्ठ अथवा निम्निष्ठ मान ज्ञात कीजिए।

12. Find the value of $\iiint_V x^2 dx\, dy\, dz$ where V is the region bounded by the planes $x = 0$, $y = 0$ $z = 0$ and $x + y + z = a$.

मान ज्ञात कीजिए $\iiint_V x^2 dx\, dy\, dz$ जहाँ क्षेत्र V तलों $x = 0$, $y = 0$ $z = 0$ तथा $x + y + z = a$ से घिरा हुआ है।



13. Prove that :

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1 - x^3}} = \frac{\left(\left|\frac{1}{3}\right.\right)^3}{2^{4/3}\sqrt{3\pi}}$$

सिद्ध कीजिए :

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1 - x^3}} = \frac{\left(\left|\frac{1}{3}\right.\right)^3}{2^{4/3}\sqrt{3\pi}}$$