MPH–03

June – Examination 2024

M.Sc. (Previous) Examination

PHYSICS

(Quantum Mechanics)

क्वाण्टम यांत्रिकी

Paper : MPH-03

*Time : **3** Hours*] [*Maximum Marks : **80***

Note :– The question paper is divided into three Sections A, B and C. Write answers as per the given instructions. In case of any discrepancy, the English version will be final for all purposes.

निर्देश :- यह प्रश्न-पत्र 'अ', 'ब' और 'स' तीन खण्डों में विभाजित है। प्रत्येक खण्ड के निर्देशानुसार प्रश्नों के उत्तर दीजिए। किसी भी विसंगति की स्थिति में अंग्रेजी रूप ही अंतिम माना जायेगा।

Section–A **8×2=16**

(Very Short Answer Type Questions)

Note :– Answer all questions. As per the nature of the question delimit your answer in one word, one sentence or maximum up to **30** words. Each question carries 2 marks.

खण्ड—अ

(अति लघु उत्तरीय प्रश्न)

निर्देश :- सभी प्रश्नों के उत्तर दीजिए। आप अपने उत्तर को प्रश्नानुसार एक शब्द, एक वाक्य या अधिकतम **30** शब्दों में परिसीमित कीजिए। प्रत्येक प्रश्न 2 अंक का है।

1. (i) Pauli matrix is given by

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Obtain the final matrix form of $\sigma_x\ \sigma_y\ \sigma_z$.

पाउली मैट्रिक्स

$$\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

द्वारा दी जाती है तो $\sigma_x\, \sigma_y\, \sigma_z$ का अंतिम मैट्रिक्स फॉर्म प्राप्त कीजिए।

(ii) The unperturbed wave function for infinite square well for $n = 2$ state is

$$\psi_2^0(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{2\pi}{a} x\right).$$

Suppose we perturb the system by simply raising the floor of the well a constant amount V_0. The first order correction to $n = 2$ state is given by

$$E_2^1 = \int_0^a \psi_2^0(x)\, V_0\, \psi_2^0(x)\, dx.$$

Calculate the value of E_2^1.

अनंत वर्गाकार कुएँ के लिए $n = 2$ के लिए बिना विक्षोभ का तरंग फलन

$$\psi_2^0(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{2\pi}{a} x\right)$$

द्वारा दिया जाता है। यदि हम साधारणतया कुएँ के तल को अचर परिमाण V_0 से ऊपर उठाकर विक्षोभित करते हैं। प्रथम कोटि का संशोधन $n = 2$ अवस्था के लिए

$$E_2^1 = \int_0^a \psi_2^0(x)\, V_0\, \psi_2^0(x)\, dx$$

द्वारा दिया जाता है तो E_2^1 के मान की गणना कीजिए।

(iii) Write the ground state term symbol for the following configuration $(5s)^1(4d)^4$, if given that :

$$J = \frac{1}{2}.$$

निम्नलिखित विन्यास $(5s)^1(4d)^4$ के लिए मूल अवस्था चिह्न लिखिए, यदि

$$J = \frac{1}{2}.$$

(iv) Write the solution of Φ equation for hydrogen atom for magnetic quantum number of value of 3.

हाइड्रोजन परमाणु के लिए चुम्बकीय क्वाण्टम संख्या 3 के लिए Φ समीकरण का हल लिखिए।

(v) An electron state is described by the spin as given in the basis as :

$$Y = \begin{bmatrix} \frac{8i}{\sqrt{71}} \\ \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{71}} \end{bmatrix}.$$

What is the probability that the electron has spin up ?

आधार के रूप में एक इलेक्ट्रॉन की स्पिन अवस्था निम्नलिखित तरह से दी जाती है :

$$Y = \begin{bmatrix} \frac{8i}{\sqrt{71}} \\ \frac{\sqrt{7}}{\sqrt{71}} \end{bmatrix}$$

इलेक्ट्रॉन के स्पिन अप होने की प्रायिकता क्या होगी ?

(vi) Heisenberg equation of motion :

$$\frac{d}{dt} A^{(H)} = \frac{2\pi}{ih} [A^{(H)}, 4X]$$

What does X represent ?

हाइजेनबर्ग गति के समीकरण :

$$\frac{d}{dt} A^{(H)} = \frac{2\pi}{ih} [A^{(H)}, 4X]$$

यहाँ X क्या प्रदर्शित करता है ?

(vii) For spin half system :

$$S_z |-\rangle = \frac{b}{2} |-\rangle$$

$$S_z |+\rangle = 2c |+\rangle .$$

Symbols have usual meaning. What is the value of $(b + c)$?

स्पिन अर्द्ध निकाय के लिए :

$$S_z |-\rangle = \frac{b}{2} |-\rangle$$

$$S_z |+\rangle = 2c |+\rangle .$$

यहाँ प्रतीकों के सामान्य अर्थ हैं। $(b + c)$ का मान क्या होगा ?

(viii) The set of eigenfunctions ψ_n forms a complete set of normalized and Orthogonal (Orthonormal) functions. Find the value of following function :

$$3\int \psi_1 \psi_2^* \, dq + 4\int \psi_1 \psi_3^* \, dq + 5\int \psi_2 \psi_3^* \, dq .$$

आइगेनफलन ψ_n के समुच्चय प्रसामान्यकृत व लाम्बिक फलन बनाते हैं। निम्नलिखित फलन का मान ज्ञात कीजिए :

$$3\int \psi_1 \psi_2^* \, dq + 4\int \psi_1 \psi_3^* \, dq + 5\int \psi_2 \psi_3^* \, dq .$$

Section–B **4×8=32**

(Short Answer Type Questions)

Note :– Answer any *four* questions. Each answer should not exceed **200** words. Each question carries 8 marks.

खण्ड—ब

(लघु उत्तरीय प्रश्न)

निर्देश :- किन्हीं **चार** प्रश्नों के उत्तर दीजिए। आप अपने उत्तर को अधिकतम **200** शब्दों में परिसीमित कीजिए। प्रत्येक प्रश्न 8 अंक का है।

2. Show that the operator

$$\hat{x} = i\frac{h}{2\pi}\frac{d}{dp}$$

is Hermitian.

यह दर्शाइए कि संकारक

$$\hat{x} = i\frac{h}{2\pi}\frac{d}{dp}$$

हर्मिशियन है।

3. Explain Wentzel-Kramers-Brillouin approximation.

वेटजेल-क्रेमर-ब्रिलोइन सन्निकटता समझाइए।

4. Prove the following commutation relation :

$$[L_x, L_y] = i\hbar L_z.$$

निम्नलिखित क्रमविनिमय सम्बन्ध को सिद्ध कीजिए :

$$[L_x, L_y] = i\hbar L_z.$$

5. Explain the zero point energy of the one dimensional harmonic oscillator.

एकविमीय सरल आवृत्ति दोलक की शून्य बिन्दु ऊर्जा को समझाइए।

6. Prove that the fundamental commutation relation :

$$[x, p_x] = \frac{ih}{2\pi}$$

remains unchanged under unitary transformation.

यह सिद्ध कीजिए कि मूलभूत विनिमय सम्बन्ध

$$[x, p_x] = \frac{ih}{2\pi}$$

यूनिटरी रूपान्तरण में बिना परिवर्तित हुए रहता है।

7. If the set of eigenkets $\{|a'\rangle\}$ forms a complete orthonormal set then show that :

$$\sum_{a'} |a'\rangle \langle a'| \equiv 1.$$

यदि आइगेनकेट $\{|a'\rangle\}$ का समुच्चय एक पूर्ण लाम्बिक समुच्चय बनाता है तो दर्शाओ :

$$\sum_{a'} |a'\rangle \langle a'| \equiv 1.$$

8. A particle is constrained in a potential

$$V(x) = 0 \text{ for } 0 \leq x \leq a$$

and $V(x) = \infty$ otherwise. In the x-representation, the wavefunction of the particle is given by

$$\psi(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{2\pi x}{a}$$

Find the momentum function $\Phi(p)$.

एक कण निम्नलिखित विभव में गतिशील है :

$$V(x) = 0 \text{ जहाँ } 0 \leq x \leq a$$

तथा $V(x) = \infty$ अन्य सब जगह पर x प्रदर्शन में कण का तरंग फलन निम्नलिखित तरह से दिया जाता है :

$$\psi(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{2\pi x}{a}$$

तो संवेग फलन $\Phi(p)$ को ज्ञात कीजिए।

9. Using the matrices A and B, for the trace show that :

$$\text{Tr(AB)} = \text{Tr(BA)}$$

$$A = \begin{pmatrix} 8-2i & 4i & 0 \\ 1 & 0 & 1-i \\ -8 & i & 6i \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} -i & 2 & 1-i \\ 6 & 1+i & 3i \\ 1 & 5+7i & 0 \end{pmatrix}$$

मैट्रिक्स A तथा B को लीजिए, ट्रेस के लिए सिद्ध कीजिए :

$$\text{Tr(AB)} = \text{Tr(BA)}$$

$$A = \begin{pmatrix} 8-2i & 4i & 0 \\ 1 & 0 & 1-i \\ -8 & i & 6i \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} -i & 2 & 1-i \\ 6 & 1+i & 3i \\ 1 & 5+7i & 0 \end{pmatrix}$$

Section–C 2×16=32

(Long Answer Type Questions)

Note :– Answer any *two* questions. You have to delimit your each answer maximum up to **500** words. Each question carries 16 marks.

खण्ड—स

(दीर्घ उत्तरीय प्रश्न)

निर्देश :- किन्हीं **दो** प्रश्नों के उत्तर दीजिए। आप अपने उत्तर को अधिकतम **500** शब्दों में परिसीमित कीजिए। प्रत्येक प्रश्न 16 अंक का है।

10. Suppose operator a satisfies $[a, a^+] = 1$. Then find the eigenvalues of the Hermitian operator $a^+ a$. Also find eigenvectors of $a^+ a$. Here a^+ denotes the Hermitian conjugate of a and $[a, a^+]$ is commutator $aa^+ - a^+a$.

एक संकारक a संतुष्ट करता है $[a, a^+] = 1$ को, तो हर्मिशियन संकारक $a^+ a$ के लिए आइगेन मान ज्ञात कीजिए। $a^+ a$ के आइगेन सदिश भी ज्ञात कीजिए। यहाँ a^+ हर्मिशियन संयुग्मी a को प्रदर्शित करता है। $[a, a^+]$ क्रमविनिमयक $aa^+ - a^+a$ है।

11. Consider square well potential with finite depth, obtain the wavefunctions in the different regions for bound state of the particle.

परिमित गहराई वाले वर्गाकार विभव कूप को लीजिए। बंध अवस्था में कण के लिए विभिन्न भागों में तरंगफलन प्राप्त कीजिए।

12. (A) Prove that :

$$[J_z, J_+] = \frac{h}{2\pi} J_+.$$

सिद्ध कीजिए :

$$[J_z, J_+] = \frac{h}{2\pi} J_+.$$

(B) Explain the Spin Half Angular Momentum of an electron.

इलेक्ट्रॉन के अर्द्ध चक्रण कोणीय संवेग को समझाइए। 8+8

13. Describe the Stern Gerlach experiment. Also discuss the important results of this experiment.

स्टर्न गेरलक प्रयोग को समझाइए तथा इस प्रयोग के प्रमुख परिणाम बताइए।