

MT-08

June – Examination 2023

B.A./B.Sc. (Part III) Examination

MATHEMATICS

(Complex Analysis)

Paper : MT-08

Time : 3 Hours]

[Maximum Marks : 47

Note :- The question paper is divided into three Sections 'A', 'B' and 'C'. Write answers as per the given instructions. Use of non-programmable scientific calculator is allowed in this paper.

निर्देश :- यह प्रश्न-पत्र 'अ', 'ब' और 'स' तीन खण्डों में विभाजित है। प्रत्येक खण्ड के निर्देशानुसार प्रश्नों के उत्तर दीजिए। इस प्रश्न-पत्र में नॉन-प्रोग्रामेबल साइंटिफिक कैलकुलेटर के उपयोग की अनुमति है।

Section-A

7×1=7

(Very Short Answer Type Questions)

Note :- Answer all questions. As per the nature of the question delimit your answer in one word, one sentence or maximum up to **30** words. Each question carries 1 mark.

MT-08/7

(1)

T-298 Turn Over

खण्ड—अ

(अति लघु उत्तरीय प्रश्न)

निर्देश :- सभी प्रश्नों के उत्तर दीजिए। आप अपने उत्तर को प्रश्नानुसार एक शब्द, एक वाक्य या अधिकतम **30** शब्दों में परिसीमित कीजिए। प्रत्येक प्रश्न 1 अंक का है।

1. (i) Define the limit point.

सीमा बिन्दु को परिभाषित कीजिए।

(ii) Prove that $u = x^3 - 3xy^2$ is the harmonic function.

सिद्ध कीजिए कि $u = x^3 - 3xy^2$ एक प्रसंवादी फलन है।

(iii) State the necessary condition for a conformal mapping representation.

अनुकोण प्रतिचित्रण के निरूपण के लिए आवश्यक प्रतिबन्ध का कथन कीजिए।

MT-08/7

(2)

T-298

(iv) State the Cauchy's fundamental theorem.

कोशी का मूल प्रमेय का कथन कीजिए।

(v) Define the entire function.

सर्वत्र विश्लेषिक फलन को परिभाषित कीजिए।

(vi) Define the Removable singularity.

अपनेय विचित्रता को परिभाषित कीजिए।

(vii) Find the residue of the function

$$f(z) = \frac{z^2}{(z-1)(z-2)(z-3)} \text{ at } z = 1$$

फलन $f(z) = \frac{z^2}{(z-1)(z-2)(z-3)}$ का $z = 1$ पर

अवशेष ज्ञात कीजिए।

Section-B

4×5=20

(Short Answer Type Questions)

Note :- Answer any *four* questions. Each answer should not exceed **200** words. Each question carries 5 marks.

MT-08/7

(3)

T-298 Turn Over

खण्ड—ब

(लघु उत्तरीय प्रश्न)

निर्देश :- किन्हीं चार प्रश्नों के उत्तर दीजिए। आप अपने उत्तर को अधिकतम **200** शब्दों में परिसीमित कीजिए। प्रत्येक प्रश्न 5 अंक का है।

2. Prove that function $u = \cos x \cosh y$ is harmonic and find its harmonic conjugate.

सिद्ध कीजिए कि फलन $u = \cos x \cosh y$ प्रसंवादी हैं तथा इसका प्रसंवादी संयुग्मी ज्ञात कीजिए।

3. Find the bilinear transformation which transform the points $z = 0, i, \infty$ to $w = \infty, i, 0$.

द्विरैखीय रूपान्तरण ज्ञात कीजिए जो बिन्दुओं $z = 0, i, \infty$, क्रमशः $w = \infty, i, 0$ को रूपान्तरित करता है।

4. State and prove Cauchy integral theorem.

कोशी समाकलन प्रमेय को कथन कर सिद्ध कीजिए।

MT-08/7

(4)

T-298

5. Evaluate :

$$\int_c \frac{\sin \pi z^2 + \cos \pi z^2}{(z-1)(z-2)} dz$$

where $c : |z| = 3$.

मान ज्ञात कीजिए :

$$\int_c \frac{\sin \pi z^2 + \cos \pi z^2}{(z-1)(z-2)} dz$$

जहाँ $c : |z| = 3$.

6. Discuss the singularities for the function

$$f(z) = \frac{z}{(z-1)^2} \cos\left(\frac{1}{z-2}\right).$$

फलन $f(z) = \frac{z}{(z-1)^2} \cos\left(\frac{1}{z-2}\right)$ की विचित्रताओं की

विवेचना कीजिए।

7. Find the residue of $\frac{z^3}{z^2-1}$ at $z = \infty$.

$\frac{z^3}{z^2-1}$ का अवशेष $z = \infty$ पर ज्ञात कीजिए।

8. Evaluate :

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2 + \cos \theta}$$

मान ज्ञात कीजिए :

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{2 + \cos \theta}$$

9. State and prove uniqueness of analytic continuation.

विश्लेषिक सांतत्य की अद्वितीयता का कथन कर सिद्ध कीजिए।

Section-C

2×10=20

(Long Answer Type Questions)

Note :- Answer any *two* questions. You have to delimit your each answer maximum up to **500** words. Each question carries 10 marks.

खण्ड-स

(दीर्घ उत्तरीय प्रश्न)

निर्देश :- किन्हीं दो प्रश्नों के उत्तर दीजिए। आप अपने उत्तर को अधिकतम **500** शब्दों में परिसीमित कीजिए। प्रत्येक प्रश्न 10 अंक का है।

10. Prove that a stereographic projection projects circles into circles or straight lines.

सिद्ध कीजिए कि एक त्रिविम प्रक्षेप वृत्तों को वृत्तों में या सरल रेखाओं में प्रक्षेप करता है।

11. State and prove Poisson's integral formula.

पॉयसन के समाकलन सूत्र का कथन कर सिद्ध कीजिए।

12. Expand :

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-3)}$$

for

(i) $|z| < 1$

(ii) $1 < |z| < 3$

(iii) $|z| > 3$

प्रसार कीजिए :

$$f(z) = \frac{1}{(z-1)(z-3)}$$

के लिए प्रसार कीजिए :

(i) $|z| < 1$

(ii) $1 < |z| < 3$

(iii) $|z| > 3$

13. By contour integration, prove that

$$\int_0^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)^2} dx = \frac{\pi}{4}$$

परिरेखा समाकलन से, सिद्ध कीजिए :

$$\int_0^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)^2} dx = \frac{\pi}{4}$$