MT–07

June – Examination 2023

B.A./B.Sc. (Part III) Examination

MATHEMATICS

(Algebra)

Paper : MT-07

*Time : **3** Hours*] [*Maximum Marks : **47***

Note :– The question paper is divided into three Sections A, B and C. Use of non-programmable scientific calculator is allowed in this paper.

निर्देश :- यह प्रश्न-पत्र 'अ', 'ब' और 'स' तीन खण्डों में विभाजित है। इस प्रश्न-पत्र में नॉन-प्रोग्रामेबल साइंटिफिक कैलकुलेटर के उपयोग की अनुमति है।

Section–A 7×1=7

(Very Short Answer Type Questions)

Note :– Answer all questions. As per the nature of the question delimit your answer in one word, one sentence or maximum up to **30** words. Each question carries 1 mark.

खण्ड—अ

(अति लघु उत्तरीय प्रश्न)

निर्देश :- सभी प्रश्नों के उत्तर दीजिए। आप अपने उत्तर को प्रश्नानुसार एक शब्द, एक वाक्य या अधिकतम **30** शब्दों में परिसीमित कीजिए। प्रत्येक प्रश्न 1 अंक का है।

1. (i) Define per mutation group.

   क्रमचय समूह को परिभाषित कीजिए।

   (ii) Define group homomorphism.

   समूह समाकारिता को परिभाषित कीजिए।

   (iii) Define quotient group.

   विभाग समूह को परिभाषित कीजिए।

   (iv) Define Field.

   क्षेत्र को परिभाषित कीजिए।

   (v) Define ideal.

   गुणजावली को परिभाषित कीजिए।

(vi) Define vector space.

सदिश समष्टि को परिभाषित कीजिए।

(vii) Define linear independence.

रैखिक स्वतन्त्रता को परिभाषित कीजिए।

Section–B **4×5=20**

(Short Answer Type Questions)

Note :– Answer any *four* questions. Each answer should not exceed **200** words. Each question carries 5 marks.

खण्ड—ब

(लघु उत्तरीय प्रश्न)

निर्देश :- किन्हीं **चार** प्रश्नों के उत्तर दीजिए। आप अपने उत्तर को अधिकतम **200** शब्दों में परिसीमित कीजिए। प्रत्येक प्रश्न 5 अंक का है।

2. Show that the set of all the matrices of the form

$$A_\alpha = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}, \alpha \in R$$

is an abelian group for matrix multiplication.

सिद्ध कीजिए कि

$$A_\alpha = \begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}, \alpha \in R$$

प्रकार की सभी मैट्रिसेज का समुच्चय मैट्रिक्स गुणा के लिए आवेली समूह है।

3. Show that the intersection of any two subgroups of a group G is again a subgroup of G.

सिद्ध कीजिए कि किसी समूह G के दो उपसमूहों का सर्वनिष्ठ G का उपसमूह होता है।

4. If H is the only subgroup with finite order in a group G, then prove that H is normal subgroup of G.

यदि किसी समूह G में परिमित कोटि का एकमात्र उपसमूह H हो, तो सिद्ध कीजिए कि H, G का प्रसामान्य उपसमूह है।

5. Prove that every permutation can be expressed as the product of disjoint cycles.

सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक क्रमचय असंयुक्त चक्रों के गुणनफल के रूप में व्यक्त किया जा सकता है।

6. Prove that every field is necessarily an integral domain but the converse is not necessarily true.

सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक क्षेत्र अनिवार्यत: प्रान्त होता है परन्तु इसका विलोम सदैव सत्य नहीं होता है।

7. Prove that the field has no proper ideals.

सिद्ध कीजिए कि क्षेत्र की उचित गुणजावलियाँ नहीं होती हैं।

8. Show that the linear sum of two sub-spaces of a vector space is also a sub-space.

सिद्ध कीजिए कि किसी सदिश समष्टि की दो उपसमष्टियों का एकघातीय योग भी एक उपसमष्टि होती है।

9. Show that the set S = {(1, 0, 0); (1, 1, 0); (1, 1, 1)} forms a basis of $V_3(R)$.

सिद्ध कीजिए कि समुच्चय S = {(1, 0, 0); (1, 1, 0); (1, 1, 1)} सदिश समष्टि $V_3(R)$ का एक आधार निर्मित करता है।

Section–C 2×10=20

(Long Answer Type Questions)

Note :– Answer any *two* questions. You have to delimit your each answer maximum up to **500** words. Each question carries 10 marks.

खण्ड–स

(दीर्घ उत्तरीय प्रश्न)

निर्देश :- किन्हीं **दो** प्रश्नों के उत्तर दीजिए। आप अपने उत्तर को अधिकतम **500** शब्दों में परिसीमित कीजिए। प्रत्येक प्रश्न 10 अंक का है।

10. State and prove fundamental theorem of group homomorhism.

समूह समाकारिता के मूल प्रमेय का कथन लिखकर सिद्ध कीजिए।

11. Prove that every integral domain can be embedded into a field.

सिद्ध करो कि प्रत्येक पूर्णांकीय प्रान्त का एक क्षेत्र में अन्तस्थापन किया जा सकता है।

12. If I is an ideal of a ring R, then show that the set $R/I = \{I + a \mid a \in R\}$ is a ring for addition and multiplication defined as follows :

यदि I किसी वलय R में एक गुणजावली हो, तो सिद्ध कीजिए कि समुच्चय $R/I = \{I + a \mid a \in R\}$ निम्न प्रकार परिभाषित योग एवं गुणन संक्रियाओं के लिए वलय होता है :

$(I + a) + (I + b) = I + (a + b)$

$(I + a) . (I + b) = I + ab$; $I + a, I + b \in R/I$

13. If V(F) is a vector space and $S = \{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n\}$ is a subset of some non-zero vectors of V, then show that S is linearly dependent if and only if some of the vectors of S can be expressed as a linear combination of preceding one's.

यदि V(F) एक सदिश समष्टि है तथा $S = \{\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n\}$ V के शून्येतर सदिशों का एक उपसमुच्चय है, तो सिद्ध कीजिए कि S एकघाततः परतन्त्र होगा यदि और केवल यदि S का कोई सदिश अपने पूर्ववर्ती सदिशों के एकघात संचय के रूप में व्यक्त किया जा सके।