

**MT-04**

**June – Examination 2023**

**B.A./B.Sc. (Part II) Examination**

**MATHEMATICS**

**(Real Analysis and Metric Space)**

**Paper : MT-04**

*Time : 3 Hours ]*

*[ Maximum Marks : 47*

**Note** :- The question paper is divided into three Sections A, B and C. Write answers as per the given instructions.

**निर्देश** :- यह प्रश्न-पत्र 'अ', 'ब' और 'स' तीन खण्डों में विभाजित है। प्रत्येक खण्ड के निर्देशानुसार प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

**Section-A**

**(Very Short Answer Type Questions)**

**Note** :- Answer all questions. As per the nature of the question delimit your answer in one word, one sentence or maximum up to **30** words. Each question carries 1 mark.

*MT-04/7*

( 1 )

**T-294** Turn Over

**खण्ड—अ**

**(अति लघु उत्तरीय प्रश्न)**

**निर्देश** :- सभी प्रश्नों के उत्तर दीजिए। आप अपने उत्तर को प्रश्नानुसार एक शब्द, एक वाक्य या अधिकतम **30** शब्दों में परिसीमित कीजिए। प्रत्येक प्रश्न 1 अंक का है।

1. (i) Define the Supremum (Least upper band).  
उच्चक को परिभाषित कीजिए।
- (ii) Define a convergent sequence.  
अभिसारी अनुक्रम को परिभाषित कीजिए।
- (iii) Define Derivative.  
अवकलज को परिभाषित कीजिए।
- (iv) Define Simultaneous limit.  
युगपत सीमा को परिभाषित कीजिए।
- (v) Define Riemann integral.  
रीमान समाकल को परिभाषित कीजिए।
- (vi) Define pointwise convergence of sequence of functions.  
फलनों के अनुक्रम का बिन्दुशः अभिसरण को परिभाषित कीजिए।
- (vii) Define Open sphere.  
विवृत गोलक को परिभाषित कीजिए।

*MT-04/7*

( 2 )

**T-294**

## Section-B

### (Short Answer Type Questions)

**Note** :- Answer any *four* questions. Each answer should not exceed **200** words. Each question carries 5 marks.

#### खण्ड—ब

#### (लघु उत्तरीय प्रश्न)

**निर्देश** :- किन्हीं चार प्रश्नों के उत्तर दीजिए। आप अपने उत्तर को अधिकतम **200** शब्दों में परिसीमित कीजिए। प्रत्येक प्रश्न 5 अंक का है।

2. Prove that  $\sqrt{2}$  is an irrational number.

सिद्ध कीजिए कि  $\sqrt{2}$  एक अपरिमेय संख्या है।

3. Prove that every Cauchy sequence is bounded.

सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक कोशी अनुक्रम परिबद्ध है।

4. Examine for continuity the following function at  $x = 0$  :

निम्न फलन की  $x = 0$  पर सांतत्यता की जाँच कीजिए :

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x - |x|}{x}, & x \neq 0 \\ 1, & x = 0 \end{cases}$$

5. Prove that every continuous function is R-integrable.

सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक संतत फलन R-समाकलनीय होता है।

6. Test the uniform convergence of the following :

निम्न श्रेणी के एकसमान अभिसरण के लिए परीक्षण कीजिए :

$$\left\{ \frac{nx}{1 + n^2 x^2} \right\}, 0 \leq x \leq 1$$

7. Let the mapping  $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  defined by :

माना कि प्रतिचित्रण  $d : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  निम्न प्रकार परिभाषित है :

$$d(x, y) = \begin{cases} 0, & x = y \\ 1, & x \neq y \end{cases} \forall x, y \in \mathbb{R}$$

Prove that  $(\mathbb{R}, d)$  is a metric space.

सिद्ध कीजिए कि  $(\mathbb{R}, d)$  एक दूरीक समष्टि है।

8. Let A be a subset of metric space  $(X, d)$ , then prove that :

माना कि A दूरीक समष्टि  $(X, d)$  का एक उपसमुच्चय है, तब सिद्ध कीजिए कि :

(i)  $A^\circ \subseteq A$

(ii)  $A^\circ$  is an open set ( $A^\circ$  एक विवृत समुच्चय है)

9. Prove that if a function  $f$  is differentiable at a point  $c \in [a, b]$  then  $f$  is continuous at  $c$  but converse is not necessarily true.

सिद्ध कीजिए कि यदि एक फलन  $f, [a, b]$  के किसी बिन्दु  $c$  पर अवकलनीय है तो वह  $c$  पर सतत होगा, किन्तु विलोम सदैव सत्य नहीं है।

### Section-C

#### (Long Answer Type Questions)

**Note :-** Answer any *two* questions. You have to delimit your each answer maximum up to **500** words. Each question carries 10 marks.

#### खण्ड-स

#### (दीर्घ उत्तरीय प्रश्न)

**निर्देश :-** किन्हीं दो प्रश्नों के उत्तर दीजिए। आप अपने उत्तर को अधिकतम **500** शब्दों में परिसीमित कीजिए। प्रत्येक प्रश्न 10 अंक का है।

10. Let :

माना :

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^2 + y^2}}, & (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & , (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

MT-04/7

( 5 )

**T-294** Turn Over

show that  $f(x, y)$  is continuous but not differentiable at  $(0, 0)$ .

दर्शाइये कि  $(x, y), (0, 0)$  पर संतत किन्तु अवकलनीय नहीं है।

11. If  $f$  is a function defined on  $[0, 1]$  as follows :

यदि फलन  $f, [0, 1]$  पर निम्न प्रकार परिभाषित है :

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{if } x \neq \frac{1}{2} \\ 0 & \text{if } x = \frac{1}{2} \end{cases}$$

then, show that  $f \in R[0, 1]$  and  $\int_0^1 f(x) dx = 1$ .

तब दर्शाइये कि  $f \in R[0, 1]$  और  $\int_0^1 f(x) dx = 1$ ।

12. By Cauchy's general principle of convergence for sequence, prove that the sequence  $\langle x_n \rangle$  where,

कोशी के अभिसरण के सामान्य सिद्धान्त से सिद्ध कीजिए कि अनुक्रम  $\langle x_n \rangle$ , जहाँ

$$x_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots$$

is no convergent.

अभिसारी नहीं है।

MT-04/7

( 6 )

**T-294**

13. Test for uniform convergence in  $[0, 1]$  the series :

निम्न श्रेणी की  $[0, 1]$  में एकसमान अभिसरण के लिए जाँच कीजिए :

$$\sum \left[ \frac{n}{1+n^2x^2} - \frac{n+1}{1+(n+1)^2x^2} \right] x$$