

MT-02

June – Examination 2023

B.A./B.Sc. (Part-I) Examination

MATHEMATICS

(Calculus and Differential Equations)

Paper : MT-02

Time : 3 Hours]

[Maximum Marks : 47

Note :- The question paper is divided into three Sections A, B and C. Use of non-programmable scientific calculator is allowed in this paper.

निर्देश :- यह प्रश्न-पत्र 'अ', 'ब' और 'स' तीन खण्डों में विभाजित है। इस प्रश्न-पत्र में नॉन-प्रोग्रामेबल साइंटिफिक कैलकुलेटर के उपयोग की अनुमति है।

Section-A

7×1=7

(Very Short Answer Type Questions)

Note :- Answer all questions. As per the nature of the question delimit your answer in one word, one sentence or maximum up to **30** words. Each question carries 1 mark.

MT-02/8

(1)

T-292 Turn Over

खण्ड—अ

(अति लघु उत्तरीय प्रश्न)

निर्देश :- सभी प्रश्नों के उत्तर दीजिए। आप अपने उत्तर को प्रश्नानुसार एक शब्द, एक वाक्य या अधिकतम **30** शब्दों में परिसीमित कीजिए। प्रत्येक प्रश्न 1 अंक का है।

1. (i) Write Cauchy's n th root test for convergence of series.

श्रेणी के अभिसरण के लिए कोशी का n वाँ मूल परीक्षण लिखिए।

(ii) Define Power Series.

घात श्रेणी को परिभाषित कीजिए।

(iii) Write formula for radius of curvature in Polar Equation.

ध्रुवीय समीकरणों के लिए वक्रता त्रिज्या का सूत्र लिखिए।

(iv) State Euler's theorem on Homogeneous Functions.

समघात फलनों पर आयलर का प्रमेय का कथन कीजिए।

(v) Define Node.

नोड को परिभाषित कीजिए।

MT-02/8

(2)

T-292

(vi) Define Rectification.

चापकलन को परिभाषित कीजिए।

(vii) Check exactness of differential equation :

$$y \sin 2x ds - (1 + y^2 + \cos^2 x) dy = 0$$

अवकल समीकरण की यथार्थता की जाँच कीजिए :

$$y \sin 2x ds - (1 + y^2 + \cos^2 x) dy = 0$$

Section-B **4×5=20**

(Short Answer Type Questions)

Note :- Answer any *four* questions. Each answer should not exceed **200** words. Each question carries 5 marks.

खण्ड—ब

(लघु उत्तरीय प्रश्न)

निर्देश :- किन्हीं **चार** प्रश्नों के उत्तर दीजिए। आप अपने उत्तर को अधिकतम **200** शब्दों में परिसीमित कीजिए। प्रत्येक प्रश्न 5 अंक का है।

2. Examine convergence of series :

$$x + \frac{2^2 x^2}{|2|} + \frac{3^3 x^3}{|3|} + \frac{4^4 x^4}{|4|} + \dots$$

श्रेणी $x + \frac{2^2 x^2}{|2|} + \frac{3^3 x^3}{|3|} + \frac{4^4 x^4}{|4|} + \dots$ के अभिसरण

की जाँच कीजिए।

3. Find Pedal equation of parabola $y^2 = 4a(x + a)$.

परवलय $y^2 = 4a(x + a)$ का पदिक समीकरण ज्ञात कीजिए।

4. Find radius of curvature at any point $P(x, y)$ of

ellipse $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$.

दीर्घवृत्त $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$ के किसी बिन्दु $P(x, y)$ पर वक्रता

त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

5. Find Asymptotes of the following curve :

$$x^3 - 2y^3 + xy(2x - y) + y(x - y) + 1 = 0$$

निम्न वक्र की अनन्तस्पर्शियों को ज्ञात कीजिए :

$$x^3 - 2y^3 + xy(2x - y) + y(x - y) + 1 = 0$$

6. Find the area of the region bounded by the curve $y^2(a-x) = x^3$ and its asymptote.

वक्र $y^2(a-x) = x^3$ एवं इसकी अनन्तस्पर्शी के द्वारा घिरे भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

7. Find the equation of the curve whose Naji equation is $s = c \tan \psi$ given $x = 0$ and $y = c$ at $\psi = 0$.

उस वक्र का समीकरण प्राप्त कीजिए जिसका नैज समीकरण $s = c \tan \psi$ जबकि $\psi = 0$ पर $x = 0$ तथा $y = c$ दिया हुआ है।

8. Evaluate the following integral by changing into polar co-ordinates :

$$\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy$$

निम्न समाकल को ध्रुवी निर्देशांकों में परिवर्तित कर मान ज्ञात कीजिए :

$$\int_0^{\infty} \int_0^{\infty} e^{-(x^2+y^2)} dx dy$$

9. Solve :

$$(xy \sin xy + \cos xy) y dx + (xy \sin xy - \cos xy) x dy = 0$$

हल कीजिए :

$$(xy \sin xy + \cos xy) y dx + (xy \sin xy - \cos xy) x dy = 0$$

Section-C

2×10=20

(Long Answer Type Questions)

Note :- Answer any *two* questions. You have to delimit your each answer maximum up to **500** words. Each question carries 10 marks.

खण्ड—स

(दीर्घ उत्तरीय प्रश्न)

निर्देश :- किन्हीं दो प्रश्नों के उत्तर दीजिए। आप अपने उत्तर को अधिकतम **500** शब्दों में परिसीमित कीजिए। प्रत्येक प्रश्न 10 अंक का है।

10. State and prove Taylor's theorem with Schlomitch and Roche's form of remainder.

श्लोमिश एवं रोशे का शेष वाला टेलर प्रमेय का कथन कर सिद्ध कीजिए।

11. (a) If $u = (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{n}{2}}$, then show that :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = n(n+1)(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{n}{2}-1}$$

यदि $u = (x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{n}{2}}$, तो प्रदर्शित कीजिए कि :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} = n(n+1)(x^2 + y^2 + z^2)^{\frac{n}{2}-1}$$

(b) Find a point within the triangle such that sum of square of its angular distance from vertices is minimum.

एक त्रिभुज के अन्दर एक ऐसा बिन्दु ज्ञात कीजिए कि इसकी तीनों शीर्ष बिन्दुओं से कोणीय दूरियों के वर्गों का योगफल निम्निष्ठ हो।

12. (a) Trace the curve $r^2 = a^2 \cos 2\theta$.

वक्र $r^2 = a^2 \cos 2\theta$ का अनुरेखण कीजिए।

(b) Find the envelope of the circle whose diameter is a line of constant length which always slips between two fixed and perpendicular lines.

उस वृत्त का अन्वालोप ज्ञात कीजिए जिसका व्यास अचर लम्बाई की एक रेखा है, जो सदैव दो स्थिर एवं एक-दूसरे पर लम्ब रेखाओं के बीच फिसलती है।

13. (a) Find the surface of solid of revolution when cardioids $r = a(1 + \cos \theta)$ is revolving about initial line.

कार्डिऑइड $r = a(1 + \cos \theta)$ को प्रारम्भिक रेखा के सापेक्ष घुमाने पर बने ठोस का पृष्ठ ज्ञात कीजिए।

(b) Prove that :

$$\beta(m, n) = \beta(m + n) + \beta(m, n + 1)$$

सिद्ध कीजिए कि :

$$\beta(m, n) = \beta(m + n) + \beta(m, n + 1)$$