MPH–03

June – Examination 2023

M.Sc. (Previous) Examination

PHYSICS

(Quantum Mechanics)

क्वाण्टम यांत्रिकी

Paper : MPH-03

*Time : **3** Hours*] [*Maximum Marks : **80***

Note :– The question paper is divided into three Sections A, B and C. Write answers as per the given instructions. In case of any discrepancy, the English version will be final for all purposes. Calculators are not allowed.

निर्देश :- यह प्रश्न-पत्र 'अ', 'ब' और 'स' तीन खण्डों में विभाजित है। प्रत्येक खण्ड के निर्देशानुसार प्रश्नों के उत्तर दीजिए। किसी भी विसंगति की स्थिति में अंग्रेजी रूप ही अंतिम माना जायेगा। कैलकुलेटर के उपयोग की अनुमति नहीं है।

Section–A **8×2=16**

(Very Short Answer Type Questions)

Note :– Answer all questions. As per the nature of the question delimit your answer in one word, one sentence or maximum up to **30** words. Each question carries 2 marks.

खण्ड–अ

(अति लघु उत्तरीय प्रश्न)

निर्देश :- सभी प्रश्नों के उत्तर दीजिए। आप अपने उत्तर को प्रश्नानुसार एक शब्द, एक वाक्य या अधिकतम **30** शब्दों में परिसीमित कीजिए। प्रत्येक प्रश्न 2 अंक का है।

1. (i) Write the Solution of ϕ equation for hydrogen atom for magnetic quantum number of value of 3.

हाइड्रोजन परमाणु के लिए चुम्बकीय क्वांटम संख्या 3 के लिए ϕ समीकरण का हल लिखिए।

(ii) The set of eigenfunctions ψ_n forms a complete set of normalized and Orthogonal (Orthonormal) functions. Find the value of following function :

$$2\int \psi_1 \psi_2^* dq + 3\int \psi_1 \psi_3^* dq + 6\int \psi_2 \psi_3^* dq$$

आइगेनफलन ψ_n के समुच्चय प्रसमान्यकृत व लाम्बिक फलन बनाते हैं। निम्न फलन का मान ज्ञात कीजिए :

$$2\int \psi_1 \psi_2^* dq + 3\int \psi_1 \psi_3^* dq + 6\int \psi_2 \psi_3^* dq$$

(iii) For stationary state :

$$\psi = \sum_n a_n e^{-\frac{i}{\hbar} E_n t} \psi_n(q)$$

What does the squared modulus $|a_n|^2$ of the expansion coefficients represent ?

स्थायी अवस्था के लिए :

$$\psi = \sum_n a_n e^{-\frac{i}{\hbar} E_n t} \psi_n(q)$$

विस्तार गुणांक का वर्ग मापांक $|a_n|^2$ क्या प्रदर्शित करता है ?

(iv) For spin half system :

$$S_z |-\rangle = b|-\rangle$$

$$S_z |+\rangle = 4c|+\rangle$$

Symbols have usual meaning. What is the value of $(b + c)$?

स्पिन अर्ध निकाय के लिए :

$$S_z |-\rangle = b|-\rangle$$

$$S_z |+\rangle = 4c|+\rangle$$

यहाँ प्रतीकों के सामान्य अर्थ हैं। $(b + c)$ का मान क्या होगा ?

(v) The eigenvalue of a unitary operator is $\left|\frac{1}{2}+i\frac{b}{2}\right|$. What is the value of b ?

यूनीटरी संकारक का आइगेन मान $\left|\frac{1}{2}+i\frac{b}{2}\right|$ है। b का मान क्या होगा ?

(vi) If :

$$xp_x - p_x x = \mathrm{i}a$$

$$xp_y - p_y x = b$$

What is the value of $(a + b)$?

यदि :

$$xp_x - p_x x = \mathrm{i}a$$

$$xp_y - p_y x = b$$

$(a + b)$ का मान क्या होगा ?

(vii) Heisenberg equation of motion :

$$\frac{d}{dt}\mathrm{A}^{(\mathrm{H})} = \frac{2\pi}{ih}\left[\mathrm{A}^{(\mathrm{H})}, 2\mathrm{X}\right]$$

What does X represent ?

हाइजेनबर्ग गति के समीकरण :

$$\frac{d}{dt}\mathrm{A}^{(\mathrm{H})} = \frac{2\pi}{ih}\left[\mathrm{A}^{(\mathrm{H})}, 2\mathrm{X}\right]$$

यहाँ X क्या प्रदर्शित करता है ?

(viii) In total angular momentum representation :

$$\mathrm{J}_z \mid j, m\rangle = b \mid j, m\rangle$$

What is the value of b ?

कुल कोणीय संवेग पद्धति में :

$$\mathrm{J}_z \mid j, m\rangle = b \mid j, m\rangle$$

तो b का मान क्या होगा ?

Section–B 4×8=32

(Short Answer Type Questions)

Note :– Answer any *four* questions. Each answer should not exceed **200** words. Each question carries 8 marks.

खण्ड—ब

(लघु उत्तरीय प्रश्न)

निर्देश :- किन्हीं **चार** प्रश्नों के उत्तर दीजिए। आप अपने उत्तर को अधिकतम **200** शब्दों में परिसीमित कीजिए। प्रत्येक प्रश्न 8 अंक का है।

2. Evaluate :

$$\left\langle n \left| (a + a^{+})^{4} \right| n \right\rangle$$

$\left\langle n \left| (a + a^{+})^{4} \right| n \right\rangle$ ज्ञात कीजिए ।

3. Using Schrödinger wave equation obtain the equation of continuity :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div \vec{J} = 0$$

where ρ is the probability density and $\vec{J}$ is the probability current density.

श्रोडिंगर समीकरण का उपयोग करते हुए सांतत्य समीकरण :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + div \vec{J} = 0$$

को प्राप्त कीजिए जहाँ ρ प्रायिकता घनत्व है तथा $\vec{J}$ प्रायिकता धारा घनत्व है।

4. Briefly explain the WKB approximation.

संक्षेप में WKB सन्निकटता को समझाइए।

5. Prove that the fundamental commutation relation :

$$[x, p_x] = \frac{ih}{2\pi}$$

remains unchanged under unitary transformation.

यह सिद्ध कीजिए कि मूलभूत विनिमय सम्बन्ध :

$$[x, p_x] = \frac{ih}{2\pi}$$

यूनिटरी रूपान्तरण में अपरिवर्तित रहता है।

6. Prove that if A is Hermitian operator, then e^{iA} is unitary operator.

यह दर्शाइए कि यदि A हर्मिशियन संकारक है तो e^{iA} एक यूनिटरी संकारक है।

7. Plot the wave functions ψ_0, ψ_1, ψ_2, ψ_3 for the one dimensional harmonic oscillator.

एकविमीय सरल आवृत्ति दोलन तरंग फलन ψ_0, ψ_1, ψ_2, ψ_3 बनाइए।

8. Using Heisenberg form of equation of motion, show that in the case of a stationary state with a discrete spectrum the mean value of the momentum is $\overline{\hat{p}} = 0$.

हैजेंबर्ग गति के समीकरण से यह दर्शाओ कि विविक्त स्पेक्ट्रम के साथ स्थायी अवस्था का माध्य संवेग $\overline{\hat{p}} = 0$ रहता है।

9. A particle is constrained in a potential $v(x) = 0$ for $0 \leq x \leq a$ and $v(x) = \infty$ otherwise. In the x-representation, the wave function of the particle is given by :

$$\psi(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{2\pi x}{a}$$

Find the momentum function $\phi(p)$. 8+8

एक कण निम्न विभव में गतिशील है :

$v(x) = 0$ जहाँ $0 \leq x \leq a$ तथा $v(x) = \infty$

अन्य सब जगह पर x प्रदर्शन में कण का तरंग फलन निम्न तरह से दिया जाता है :

$$\psi(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{2\pi x}{a}$$

तो संवेग फलन $\phi(p)$ को ज्ञात कीजिए।

Section–C 2×16=32

(Long Answer Type Questions)

Note :– Answer any *two* questions. You have to delimit your each answer maximum up to **500** words. Each question carries 16 marks.

खण्ड—स

(दीर्घ उत्तरीय प्रश्न)

निर्देश :- किन्हीं **दो** प्रश्नों के उत्तर दीजिए। आप अपने उत्तर को अधिकतम **500** शब्दों में परिसीमित कीजिए। प्रत्येक प्रश्न 16 अंक का है।

10. Solve the Schrödinger wave equation for the case of hydrogen atom and discuss the θ and ϕ solutions. 8+8

हाइड्रोजन परमाणु के लिए श्रोडिंगर समीकरण को हल कीजिए एवं θ तथा ϕ हलों की व्याख्या कीजिए।

11. Explain the time independent perturbation theory and obtain the first order correction term in energy.

काल अनाश्रित विक्षोभ सिद्धान्त को समझाइए तथा ऊर्जा में प्रथम कोटि का संशोधन प्राप्त कीजिए।

12. (a) For Pauli matrices prove that :

$$[\sigma_x, \sigma_y] = 2i\,\sigma_z$$

पाउली के मेट्रिक्स के लिए निम्न सिद्ध कीजिए :

$$[\sigma_x, \sigma_y] = 2i\,\sigma_z$$

(b) Using the matrices A and B, for the trace show that : 8+8

$$Tr(AB) = Tr(BA)$$

$$A = \begin{pmatrix} 8-2i & 4i & 0 \\ 1 & 0 & 1-i \\ -8 & i & 6i \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} -i & 2 & 1-i \\ 6 & 1+i & 3i \\ 1 & 5+7i & 0 \end{pmatrix}$$

मेट्रिक्स A तथा B को लीजिए ट्रेस के लिए सिद्ध कीजिए :

$$Tr(AB) = Tr(BA)$$

$$A = \begin{pmatrix} 8-2i & 4i & 0 \\ 1 & 0 & 1-i \\ -8 & i & 6i \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} -i & 2 & 1-i \\ 6 & 1+i & 3i \\ 1 & 5+7i & 0 \end{pmatrix}$$

13. Describe the Stern Gerlach experiment. Also discuss the important results of this experiment.

स्टर्न गेरलक प्रयोग को समझाइए तथा इस प्रयोग के प्रमुख परिणाम बताइए। 8+8