558

MT–08

June – Examination 2020

B.A./B.Sc. (Part III) Examination

MATHEMATICS

(Second Paper)

(Complex Analysis)

Paper : MT-08

*Time : **3** Hours*] [*Maximum Marks : **47***

Note :– The question paper is divided into three Sections A, B, and C. Section 'A' contains 7 Very Short Answer Type Questions. Examinees have to attempt all questions. Each question is of 1 mark and maximum word limit may be **30** words. Section 'B' contains 8 Short Answer Type Questions. Examinees will have to answer any *four* questions. Each question is of 5 marks. Examinees have to delimit each answer in maximum **200** words. Section 'C' contains 4 Long Answer Type Questions. Examinees will have to answer any *two* questions. Each question is of 10 marks. Examinees have to delimit each answer in maximum **500** words. Use of non-programmable scientific calculator is allowed in this paper.

निर्देश :- प्रश्न-पत्र तीन खण्डों अ, ब और स में विभाजित है। खण्ड 'अ' में 7 अति लघूत्तरात्मक प्रश्न हैं, परीक्षार्थियों को सभी प्रश्नों को हल करना है। प्रत्येक प्रश्न का 1 अंक है और अधिकतम शब्द सीमा **30** शब्द हैं। खण्ड 'ब' में 8 लघु उत्तरीय प्रश्न हैं, परीक्षार्थियों को किन्हीं **चार** प्रश्नों का उत्तर देना है। प्रत्येक प्रश्न 5 अंकों का है। परीक्षार्थियों को अधिकतम **200** शब्दों में प्रत्येक उत्तर परिसीमित करने हैं। खण्ड 'स' में 4 निबन्धात्मक प्रश्न हैं। परीक्षार्थियों को किन्हीं **दो** प्रश्नों का उत्तर देना है। प्रत्येक प्रश्न 10 अंकों का है। परीक्षार्थियों को अधिकतम **500** शब्दों में प्रत्येक उत्तर परिसीमित करने हैं। इस प्रश्न-पत्र में नॉन-प्रोग्रामेबल साइंटीफिक केलकुलेटर के उपयोग की अनुमति है।

Section–A 7×1=7

(Very Short Answer Type Questions)

खण्ड—अ

(अति लघु उत्तरीय प्रश्न)

1. (i) Represent number $2+2\sqrt{3}i$ in polar form.

सम्मिश्र संख्या $2+2\sqrt{3}i$ को ध्रुवीय रूप में व्यक्त कीजिए।

(ii) Prove that two power series $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ and $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$ has same radius of convergence.

सिद्ध कीजिए कि दो घात श्रेणी $\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ तथा $\sum_{n=1}^{\infty} n a_n z^{n-1}$ की समान अभिसरण त्रिज्या है।

(iii) Define Isogonal mapping.

तुल्यकोणी रूपान्तरण को परिभाषित कीजिये।

(iv) Define analytic function.

विश्लेषिक फलन को परिभाषित कीजिये।

(v) Find value of z for which mapping $w = \left(z + \frac{1}{z}\right)$ is not conformal mapping.

z का वह मान ज्ञात कीजिये जिसके लिए प्रतिचित्रण $w = \left(z + \frac{1}{z}\right)$ अनुकोण प्रतिचित्रण नहीं है।

(vi) Define contour.

कंटूर को परिभाषित कीजिये।

(vii) State Cauchy's General Principle of Uniform Convergence for Sequence.

अनुक्रमों के एकसमान अभिसरण के लिए कोशी का सामान्य सिद्धान्त का कथन कीजिये।

Section–B 4×5=20

खण्ड—ब

(Short Answer Type Questions)

(लघु उत्तरीय प्रश्न)

2. Prove that a stereographic projection projects circles into circles or straight line.

सिद्ध कीजिए कि एक त्रिविम प्रक्षेप, वृत्तों का वृत्तों में या सरल रेखाओं में प्रक्षेप करता है।

3. Prove that every closed and bounded set is compact.

सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक संवृत्त एवं परिबद्ध समुच्चय संहत होता है।

4. Prove that $f(z) = z^2$ is uniformly continuous in domain $|z| < 1$ while $f(z) = \frac{1}{z}$ is not uniformly continuous.

सिद्ध कीजिए कि प्रान्त $|z| < 1$ में $f(z) = z^2$ एकसमान संतत है जबकि $f(z) = \frac{1}{z}$ एकसमान संतत नहीं है।

5. Find corresponding area of infinite strip $\frac{1}{4} < y < \frac{1}{2}$ under the transformation $w = \frac{1}{z}$.

रूपान्तरण $w = \frac{1}{z}$ के अन्तर्गत अनन्त पट्टी $\frac{1}{4} < y < \frac{1}{2}$ का w-समतल में समवर्ती क्षेत्र ज्ञात कीजिये।

6. Show that transformation $w = \frac{2z+3}{z-4}$ transfer circle $x^2 + z^2 - 4x = 0$ to straight lines.

प्रदर्शित कीजिये कि रूपान्तरण $w = \frac{2z+3}{z-4}$, वृत्त $x^2 + z^2 - 4x = 0$ को सरल रेखा में प्रतिचित्रित करता है।

7. Prove that derivative of analytic function is itself an analytic function.

सिद्ध कीजिए कि किसी विश्लेषिक फलन का अवकलन स्वयं एक विश्लेषिक फलन होता है।

8. Show that every function which have only poles as singularities in extended complex plane, is rational function.

प्रदर्शित कीजिये कि प्रत्येक फलन, जिसकी विस्तारित सम्मिश्र तल में विचित्रताएँ केवल अनन्तक ही हैं, परिमेय फलन है।

9. If $a > e$, then prove by Roche's theorem that equation $e^z = az^n$ has n roots in circle $|z| = 1$.

यदि $a > e$, तब रूशे प्रमेय द्वारा सिद्ध कीजिये कि समीकरण $e^z = az^n$ के वृत्त $|z| = 1$ के भीतर n मूल है।

Section–C 2×10=20

खण्ड—स

(Long Answer Type Questions)

(दीर्घ उत्तरीय प्रश्न)

10. (a) Show that function $f(z) = e^{-z^{-4}} (z \neq 0)$ and $f(0) = 0$ is not regular at $z = 0$ although Cauchy-Riemann equations are satisfied at that point.

प्रदर्शित कीजिए कि फलन $f(z) = e^{-z^{-4}} (z \neq 0)$ तथा $f(0) = 0$, $z = 0$ पर नियमित नहीं है, यद्यपि इस बिन्दु पर कौशी-रीमान समीकरण सन्तुष्ट होती हैं।

(b) Prove that function $u = e^x (x \cos y - y \sin y)$ satisfies Laplace equation and find corresponding analytic function $f(z) = u + iv$.

सिद्ध कीजिये कि फलन $u = e^x (x \cos y - y \sin y)$ लाप्लास समीकरण को सन्तुष्ट करता है तथा इसके संगत विश्लेषिक फलन $f(z) = u + iv$ ज्ञात कीजिए।

11. Prove that a power series represents an analytic function inside its circle of convergence.

सिद्ध कीजिये कि एक घात श्रेणी अपने अभिसरण वृत्त के अन्दर एक विश्लेषिक फलन निरूपित करती है।

12. State and prove Laurant's theorem for power series expansions of analytic function.

विश्लेषिक फलनों का घात श्रेणी के रूप में प्रसार के लिए लौराँ प्रमेय का कथन कर सिद्ध कीजिये।

13. (a) Evaluate :

$$\int_0^{\pi} \frac{a d\theta}{a^2 + \sin^2 \theta}, \quad (a > 0)$$

मान ज्ञात कीजिए :

$$\int_0^{\pi} \frac{a d\theta}{a^2 + \sin^2 \theta}, \quad (a > 0)$$

(b) Show that there cannot be more than one analytic continuation of an analytic function in a domain.

प्रदर्शित कीजिए कि एक ही प्रान्त में विश्लेषिक फलन के एक से अधिक विश्लेषिक सांतत्य नहीं हो सकते हैं।