

**MT-07**

June – Examination 2020

**B.A./B.Sc. (Part III) Examination****MATHEMATICS****(Algebra)****Paper : MT-07***Time : 3 Hours ]**[ Maximum Marks : 47*

**Note** :- The question paper is divided into three Sections A, B and C. Write answers as per the given instructions.

**निर्देश** :- यह प्रश्न-पत्र 'अ', 'ब' और 'स' तीन खण्डों में विभाजित है। प्रत्येक खण्ड के निर्देशानुसार प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

**Section-A****7×1=7****(Very Short Answer Type Questions)**

**Note** :- Answer all questions. As per the nature of the question delimit your answer in one word, one sentence or maximum up to 30 words. Each question carries 1 mark.

**खण्ड—अ****(अति लघु उत्तरीय प्रश्न)**

**निर्देश** :- सभी प्रश्नों के उत्तर दीजिए। आप अपने उत्तर को प्रश्नानुसार एक शब्द, एक वाक्य या अधिकतम 30 शब्दों में परिसीमित कीजिए। प्रत्येक प्रश्न 1 अंक का है।

1. (i) Define order of a group.  
समूह की कोटि को परिभाषित कीजिए।
- (ii) Define cyclic group.  
चक्रीय समूह को परिभाषित कीजिए।
- (iii) Define normal subgroup.  
विशिष्ट उपसमूह को परिभाषित कीजिए।
- (iv) Define zero divisors in a ring.  
वलय में शून्य के भाजक को परिभाषित कीजिए।
- (v) Define subfield.  
उपक्षेत्र को परिभाषित कीजिए।
- (vi) Define linear independence of vectors.  
सदिशों की एकघाती स्वतंत्रता को परिभाषित कीजिए।
- (vii) Define basis of a vector space.  
सदिश समष्टि के आधार को परिभाषित कीजिए।

**Section-B****4×5=20****(Short Answer Type Questions)**

**Note** :- Answer any *four* questions. Each answer should not exceed **200** words. Each question carries 5 marks.

**खण्ड-ब****(लघु उत्तरीय प्रश्न)**

**निर्देश** :- किन्हीं **चार** प्रश्नों के उत्तर दीजिए। आप अपने उत्तर को अधिकतम **200** शब्दों में परिसीमित कीजिए। प्रत्येक प्रश्न 5 अंकों का है।

2. Show that the set  $Q^+$  of the positive rational numbers forms an abelian group for the operation  $*$  defined as :

$$a * b = \frac{ab}{2} \quad \forall a, b \in Q^+$$

सिद्ध कीजिए कि धनात्मक परिमेय संख्याओं का समुच्चय  $Q^+$  संक्रिया  $*$  के लिए एक क्रमविनिमेय समूह है जहाँ  $*$  निम्न प्रकार परिभाषित है :

$$a * b = \frac{ab}{2} \quad \forall a, b \in Q^+$$

3. Let  $a$  be an element of a group  $(G, *)$  with order  $n$ , then show that  $a^m = e$  if and only if  $m$  is a multiple of  $n$ .

माना कि समूह  $(G, *)$  के एक अवयव  $a$  की कोटि  $n$  हो तो सिद्ध कीजिए कि  $a^m = e$  यदि और केवल यदि  $m, n$  का गुणज है।

4. Show that every infinite cyclic group has two and only two generators.

सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक अपरिमित चक्रीय समूह के दो और केवल दो ही जनक होते हैं।

5. If  $f$  be a homomorphism from a group  $G$  to  $G'$  with kernel  $K$ , then show that  $K$  is normal subgroup of  $G$ .

यदि  $f$  समूह  $G$  से  $G'$  पर एक समाकारिता है तथा  $K$  उसकी अष्टि है तब सिद्ध कीजिए कि  $K$ , समूह  $G$  का प्रसामान्य उप-समूह होगा ?

6. Show that the characteristic of an integral domain is either zero or a prime number.

सिद्ध कीजिए कि पूर्णाकीय प्रांत का अभिलक्षण या तो शून्य होता है या अभाज्य संख्या होगा ?

7. If  $a$  be an element of a commutative ring  $R$  with unity, then show that the set  $I = \{ra \mid r \in R\} = [a]$  is a principal ideal of  $R$  generated by  $a$ .

यदि  $a$  किसी तत्समकी क्रमविनिमेय वलय  $R$  का एक अवयव हो तो सिद्ध कीजिए कि समुच्चय  $I = \{ra \mid r \in R\} = [a]$ ,  $a$  द्वारा जनित  $R$  में एक मुख्य गुणजावली है।

8. Show that the linear sum of two subspaces of a vector space is also a subspace.

सिद्ध कीजिए कि किसी सदिश समष्टि की दो उपसमष्टियों का एकघातीय योग भी एक उपसमष्टि होती है।

9. Show that any superset of a linearly dependent set of vectors is also linearly dependent.

सिद्ध कीजिए कि एकघातत परतंत्र सदिशों के समुच्चय का अधिसमुच्चय भी एकघातत परतंत्र होता है।

**Section-C**

**2×10=20**

**(Long Answer Type Questions)**

**Note :-** Answer any *two* questions. You have to delimit your each answer maximum up to **500** words. Each question carries 10 marks.

**खण्ड—स**

**(दीर्घ उत्तरीय प्रश्न)**

**निर्देश :-** किन्हीं दो प्रश्नों के उत्तर दीजिए। आप अपने उत्तर को अधिकतम **500** शब्दों में परिसीमित कीजिए। प्रत्येक प्रश्न 10 अंकों का है।

10. State and prove Lagrange's theorem.

लैग्रान्ज प्रमेय का कथन लिखकर सिद्ध कीजिए।

11. Show that the set of all matrices of the form

$$\begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & b \end{bmatrix}, a, b \in R$$
 is a ring for matrix addition and multiplication. Is it without zero divisors ?

Is it without zero divisors ?

सिद्ध कीजिए कि  $\begin{bmatrix} 0 & a \\ 0 & b \end{bmatrix}, a, b \in R$  प्रकार की सभी मैट्रिसेज

का समुच्चय मैट्रिक्स योग एवं गुणन के लिए वलय है। क्या यह शून्य भाजक रहित है ?

12. Show that every integral domain can be embedded into a field.

सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक पूर्णाकीय प्रांत का एक क्षेत्र में अन्तर्स्थापन किया जा सकता है।

13. Show that any two bases of a finite dimensional vector space have the same number of elements.

सिद्ध कीजिए कि एक परिमित विमीय सदिश समष्टि के किन्हीं दो आधारों में अवयवों की संख्या समान होती है।