176

MPH–02

December – Examination 2020

M.Sc. (Previous) Examination

PHYSICS

(Mathematical Physics and Numerical Analysis)

(गणितीय भौतिकी एवं सांख्यिकी विश्लेषण)

Paper : MPH-02

*Time : **2** Hours*] [*Maximum Marks : **80***

Note :– The question paper is divided into two Sections A and B. Write answers as per the given instructions. In case of any discrepancy, the English version will be final for all purposes. Check your paper code and paper title before starting the paper. **You are allowed to use a non-programmable calculator, however sharing of calculator is not allowed.**

निर्देश :- यह प्रश्न-पत्र 'अ' और 'ब' दो खण्डों में विभाजित है। प्रत्येक खण्ड के निर्देशानुसार प्रश्नों के उत्तर दीजिए। किसी भी विसंगति की स्थिति में अंग्रेजी रूप ही अंतिम माना जायेगा। प्रश्न-पत्र शुरू करने से पूर्व पेपर कोड व प्रश्न-पत्र शीर्षक जाँच लें। **आपको बिना प्रोग्रामिंग वाले केलकुलेटर के उपयोग की अनुमति है, परन्तु केलकुलेटर के हस्तांतरण की अनुमति नहीं है।**

Section–A 8×2=16

(Very Short Answer Type Questions)

Note :– Answer all questions. As per the nature of the question delimit your answer in one word, one sentence or maximum up to **30** words. Each question carries 2 marks.

खण्ड–अ

(अति लघु उत्तरीय प्रश्न)

निर्देश :- सभी प्रश्नों के उत्तर दीजिए। आप अपने उत्तर को प्रश्नानुसार एक शब्द, एक वाक्य या अधिकतम **30** शब्दों में परिसीमित कीजिए। प्रत्येक प्रश्न 2 अंकों का है।

1. (i) Find the complex conjugate of the complex function : $z = w^{(3y + 2ix)}$, where

$$w = e^{\log(x + 5i)}.$$

निम्न सम्मिश्र फलन का सम्मिश्र संयुग्मी ज्ञात कीजिए : $z = w^{(3y + 2ix)}$, जहाँ $w = e^{\log(x + 5i)}$

(ii) For the function $\phi = x^2y + yz$ at the point (1, 2, –1), find its rate of change with distance in the direction $\vec{a} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$.

फलन $\phi = x^2y + yz$ के लिए बिन्दु (1, 2, –1) पर दूरी के साथ की दिशा $\vec{a} = \hat{i} + 2\hat{j} + 3\hat{k}$ में परिवर्तन की दर ज्ञात कीजिए।

(iii) Find the Fourier transform of the exponential decay function :

$$f(t) = \begin{cases} 0 & ; \quad \text{for } t < 0 \\ Ae^{-\lambda t} & ; \quad \text{for } t \geq 0 \end{cases}$$

निम्न चरघातांकी क्षय फलन के लिए फुरिअर रूपान्तर ज्ञात कीजिए :

$$f(t) = \begin{cases} 0 & ; \quad \text{for } t < 0 \\ Ae^{-\lambda t} & ; \quad \text{for } t \geq 0 \end{cases}$$

(iv) Find the Laplace transform of $f(t) = t \sin(bt)$, where b is constant.

फलन $f(t) = t \sin(bt)$ के लिए लाप्लास रूपान्तर ज्ञात कीजिए, जहाँ b अचर है।

(v) Evaluate the value of the :

$$\int_{-1}^{1} [P_0(x) + P_1(x) + P_2(x)]dx,$$

where $P_n(x)$ is Legendre polynomial.

$\int_{-1}^{1} [P_0(x) + P_1(x) + P_2(x)]dx$ का मान ज्ञात कीजिए, जहाँ $P_n(x)$ लिगेंड्रे बहुपद है।

(vi) Evaluate the integral $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx$ by Simpson's 1/3 rule. Here $h = 0.5$.

सिम्पसन के 1/3 नियम से समाकल $\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx$ ज्ञात कीजिए। यहाँ $h = 0.5$।

(vii) If $\phi = 4xyz^2$ and C is the curve $x = t^2$, $y = 2t$, $z = t^3$ from $t = 0$ to $t = 1$, then evaluate the line integral $\int_C \phi d\vec{r}$.

यदि $\phi = 4xyz^2$ तथा C वक्र $x = t^2$, $y = 2t$, $z = t^3$ चर $t = 0$ से $t = 1$ तक है तो रेखीय समाकल $\int_C \phi d\vec{r}$ ज्ञात कीजिए।

(viii) What is the value of Bessel function $J_{1/2}(x)$ for $x = \frac{\pi}{4}$?

$x = \frac{\pi}{4}$ के लिए बेसल फलन $J_{1/2}(x)$ का मान क्या होगा ?

Section–B 4×16=64

(Short Answer Type Questions)

Note :– Answer any *four* questions. Each answer should not exceed **200** words. Each question carries 16 marks.

खण्ड—ब

(लघु उत्तरीय प्रश्न)

निर्देश :- किन्हीं **चार** प्रश्नों के उत्तर दीजिए। आप अपने उत्तर को अधिकतम **200** शब्दों में परिसीमित कीजिए। प्रत्येक प्रश्न 16 अंकों का है।

2. Evaluate the integral $\oint_C \left(\frac{e^z}{z^2+1}\right) dz$ for the two following cases if C is a circle of unit radius with center at :

   (a) $z = i$

   (b) $z = -i$

   समाकल $\oint_C \left(\frac{e^z}{z^2+1}\right) dz$ ज्ञात कीजिए जहाँ C इकाई त्रिज्या का वृत्त है जिसका केन्द्र यदि :

   (अ) $z = i$

   (ब) $z = -i$

3. By using Rodriguez formula for Hermite polynomial obtain the $H_2(x)$, $H_4(x)$ and then plot the $H_2(x)$ versus x.

   हर्मिट बहुपद के लिए रोड्रिग्ज सूत्र का उपयोग करते हुए $H_2(x)$, $H_4(x)$ प्राप्त कीजिए तथा $H_2(x)$ को x के साथ चित्रित (Plot) कीजिए।

4. Find the Laplace transform for the following functions :

   (a) $f(t) = e^{-4t} \cos^3 t$

   (b) $f(t) = \begin{cases} \sin\left(t - \frac{\pi}{3}\right) & ; t \geq \frac{\pi}{3} \\ 0 & ; t < \frac{\pi}{3} \end{cases}$

   निम्न फलनों के लिए लाप्लास रूपांतर ज्ञात कीजिए :

   (अ) $f(t) = e^{-4t} \cos^3 t$

   (ब) $f(t) = \begin{cases} \sin\left(t - \frac{\pi}{3}\right) & ; t \geq \frac{\pi}{3} \\ 0 & ; t < \frac{\pi}{3} \end{cases}$

5. Prove the following identities :

   (a) $\delta_{ii} = 3$

   (b) $\delta_{ik}\ \varepsilon_{ikm} = 0$

निम्न सर्वसमिका को सिद्ध कीजिए :

(अ) $\delta_{ii} = 3$

(ब) $\delta_{ik}\ \varepsilon_{ikm} = 0$

6. (a) Find the Fourier cosine transform of $f(x) = e^{-mx}$, where $m > 0$.

(b) Given field $\vec{F} = 2xz\,\hat{i} + y\,\hat{j} + x^2\,\hat{k}$ check that whether given field is conservative or not.

(अ) निम्न फलन का फुरिअर कोज्या रूपान्तर ज्ञात कीजिए : $f(x) = e^{-mx}$, जहाँ $m > 0$।

(ब) दिए गए क्षेत्र $\vec{F} = 2xz\,\hat{i} + y\,\hat{j} + x^2\,\hat{k}$ के लिए यह ज्ञात कीजिए कि यह संरक्षी है अथवा नहीं।

7. Find a root of the function $y(x) = x^3 + x - 1$ by using the Bisection Method on the interval [0, 1].

फलन $y(x) = x^3 + x - 1$ के लिए मूल द्विविभाजन विधि से अंतराल [0, 1] में ज्ञात कीजिए।

8. Find the Fourier series to the following rectangular wave function :

निम्न आयताकार तरंग फलन के लिए फुरिअर श्रेणी ज्ञात कीजिए :

$$f(t) = \begin{cases} -1 & ; \quad \dfrac{-T}{2} < t < \dfrac{-T}{4} \\ 1 & ; \quad \dfrac{-T}{4} < t < \dfrac{T}{4} \\ -1 & ; \quad \dfrac{T}{4} < t < \dfrac{T}{2} \end{cases}$$

9. Consider a point P = (0, 0, z) in Cartesian coordinates and point in Q = (r_0, ϕ_0, 0) cylindrical coordinates. Draw appropriate coordinate axes x, y, z and display the both the points in a same diagram. Also find the distance PQ and write the unit vector in the direction of vector $\overrightarrow{PQ}$ in cylindrical coordinates.

कार्तीय निर्देशांक में बिन्दु P = (0, 0, z) मानिए तथा बेलनाकार निर्देशांकों में बिन्दु Q = (r_0, ϕ_0, 0) मानिए। उचित अक्षों x, y, z को निरूपित कीजिए तथा इन दोनों बिन्दुओं को इसी समान चित्र में दर्शाइए तथा दूरी PQ भी ज्ञात कीजिए तथा सदिश की दिशा में इकाई सदिश $\overrightarrow{PQ}$ बेलनाकार निर्देशांकों में ज्ञात कीजिए।