

**MT-07**

**December - Examination 2025**  
**B.A./B. Sc. (Part-III) Examination**  
**MATHEMATICS**  
**ALGEBRA**  
**Paper : MT-07**

[Time: 3 Hours]

[Maximum Marks: 47]

**Note :-** This question paper is divided into three Sections A, B and C. Write answers as per the given instructions. Use of non-programmable scientific calculator is allowed in this paper.

**निर्देश :-** यह प्रश्न-पत्र 'अ', 'ब' और 'स' तीन खण्डों में विभाजित है। दिए गए निर्देशों के अनुसार उत्तर दीजिए। इस प्रश्न-पत्र में नॉन-प्रोग्रामेबल साइंटिफिक कैलकुलेटर के उपयोग की अनुमति है।

**Section-A**

**7×1=7**

**(Very Short Answer Type Questions)**

**Note :-** Answer **all** questions. As per the nature of the question delimit your answer in one word, one sentence or maximum up to **30** words. Each question carries **1** mark.

**खण्ड—'अ'**

**(अति लघु उत्तरीय प्रश्न)**

**निर्देश :-** सभी प्रश्नों के उत्तर दीजिए। आप अपने उत्तर को प्रश्नानुसार एक शब्द, एक वाक्य या अधिकतम **30** शब्दों में परिसीमित कीजिए। प्रत्येक प्रश्न **1** अंक का है।

1. (i) Define centre of Group.  
समूह के केंद्र को परिभाषित कीजिए।
- (ii) Define Coset.  
कोसेट को परिभाषित कीजिए।
- (iii) Define Normal Subgroup.  
सामान्य उपसमूह को परिभाषित कीजिए।
- (iv) Define Quotient Ring.  
भागफल वलय को परिभाषित कीजिए।
- (v) State Gauss Divergence Theorem.  
गॉस-अपसरण प्रमेय का कथन कीजिए।
- (vi) Define linear dependent of vectors.  
सदिशों के रैखिक आश्रितता को परिभाषित कीजिए।
- (vii) Define the solenoidal vector.  
परिनालिका सदिश को परिभाषित कीजिए।

## (Short Answer Type Questions)

**Note :-** Answer **any four** questions. Each answer should not exceed **200** words. Each question carries **5** marks.

खण्ड—'ब'

(लघु उत्तरीय प्रश्न)

**निर्देश :-** किन्हीं चार प्रश्नों के उत्तर दीजिए। आप अपने उत्तर को अधिकतम **200** शब्दों में परिसीमित कीजिए। प्रत्येक प्रश्न **5** अंक का है।

2. Let  $G$  is a set of ordered pairs  $(a, b)$  of real numbers  $a$  and  $b$ . Binary operation  $*$  is defined in  $G$  as follow  $(a, b) * (c, d) = (ac, bc + d)$ . Prove that  $(G, *)$  is a group. Is it an Abelian group?

मान लीजिए  $G$  वास्तविक संख्याओं  $a$  और  $b$  के क्रमित युग्मों  $(a, b)$  का एक समूह है। बाइनरी ऑपरेशन  $*$  को  $G$  में इस प्रकार परिभाषित किया गया है  $(a, b) * (c, d) = (ac, bc + d)$ । सिद्ध करें कि  $(G, *)$  एक समूह है। क्या यह एक एबेलियन समूह है?

3. State and prove Caley Theorem.

कैली प्रमेय का कथन कर सिद्ध कीजिए।

4. If  $H$  is the only subgroup with finite order in a group  $G$ , then prove that  $H$  is normal subgroup of  $G$ .

यदि  $H$  समूह  $G$  में परिमित कोटी वाला एकमात्र उपसमूह है, तो सिद्ध कीजिए कि  $H, G$  का प्रसामान्य उपसमूह है।

5. Prove that the quotient group of an abelian group is abelian but the converse is not necessarily true.

सिद्ध कीजिए कि आबेलीय समूह का भागफल समूह आबेलीय होता है, परन्तु इसका विपरीत आवश्यक रूप से सत्य नहीं होता।

6. Prove that a field has no proper ideals.

सिद्ध कीजिए कि किसी क्षेत्र की कोई उचित गुणजावलियाँ नहीं होती।

7. Show that the following set  $V$  of matrices is vector space over the field  $R$  of real numbers with respect to matrix addition and matrix scalar multiplication where:

सिद्ध कीजिए कि आव्यूहों का निम्नलिखित समुच्चय  $V$ , आव्यूह योग और आव्यूह अदिश गुणन के संबंध में वास्तविक संख्याओं के क्षेत्र  $R$  पर सदिश समष्टि है, जहाँ :

$$V = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{bmatrix} \mid a, b \in R \right\}$$

8. Prove that linear span  $L(S)$  of a subset  $S$  of vector space  $V(F)$  is minimal subspace of  $V(F)$  that containing  $S$ .

सिद्ध कीजिए कि किसी सदिश समष्टि  $V(F)$  के उपसमुच्चय  $S$  की एक घात विस्तृति  $L(S), S$  को अंतर्विष्ट करने वाला  $V(F)$  की न्यूनतम उपसमष्टि है।

9. If  $W_1$  and  $W_2$  are subspaces of any finite dimensional vector space then prove that Dimension  $(W_1 + W_2) = \text{Dimension } W_1 + \text{Dimension } W_2 - \text{Dimension } (W_1 \cap W_2)$ .

यदि  $W_1$  और  $W_2$  किसी परिमित विमीय सदिश समष्टि की दो उपसमष्टि हो तो सिद्ध कीजिए कि विमा  $(W_1 + W_2) = \text{विमा } W_1 + \text{विमा } W_2 - \text{विमा } (W_1 \cap W_2)$ ।

## (Long Answer Type Questions)

**Note :-** Answer **any two** questions. You have to delimit your each answer maximum up to **500** words. Each question carries **10** marks.

खण्ड-‘स’

(दीर्घ उत्तरीय प्रश्न)

**निर्देश :-** किन्हीं दो प्रश्नों के उत्तर दीजिए। आप अपने उत्तर को अधिकतम **500** शब्दों में परिसीमित कीजिए। प्रत्येक प्रश्न **10** अंक का है।

10. State and prove Fundamental Theorem of Group Homeomorphism.  
समूह समकारिता के मूल प्रमेय का कथन लिखकर सिद्ध कीजिए।
11. Prove that every finite group is isomorphic to some permutation group.  
(Cayley's Theorem).  
सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक परिमित गुप किसी क्रमचय गुप के तुल्यकारिक होता है। (कैले-प्रमेय).
12. Prove that a ring without unity can be embedded into a ring with unity.  
सिद्ध कीजिये कि इकाई अवयव रहित वलय को किसी इकाई अवयव सहित वलय में अंतःस्थापित किया जा सकता है।
13. (i) Prove that intersection of 2 normal subgroups of a group is a normal subgroup of that group. 4  
सिद्ध कीजिए कि किसी समूह के किन्हीं दो प्रसामान्य उपसमूहों का सर्वनिष्ठ भी उस समूह का प्रसामान्य उपसमूह होता है।
- (ii) State and prove Cayley's Theorem for Group Homomorphism. 6  
समूह समकारिता के लिए कैले-प्रमेय को कथन कर सिद्ध कीजिए।

-----