

MT-08

December - Examination 2025
B.A./B. Sc. (Part-II) Examination
MATHEMATICS
COMPLEX ANALYSIS
Paper : MT-08

[Time: 3 Hours]

[Maximum Marks: 47]

Note :- The question paper is divided into three Sections A, B and C. Write answers as per the given instructions. Use of non-programmable scientific calculator is allowed in this paper.

निर्देश :- यह प्रश्न-पत्र 'अ', 'ब' और 'स' तीन खण्डों में विभाजित है। प्रत्येक खण्ड के निर्देशानुसार प्रश्नों के उत्तर दीजिए। इस प्रश्न-पत्र में नॉन-प्रोग्रामेबल साइंटिफिक कैलकुलेटर के उपयोग की अनुमति है।

Section-A

7×1=7

(Very Short Answer Type Questions)

Note :- Answer **all** questions. As per the nature of the question delimit your answer in one word, one sentence or maximum up to **30** words. Each question carries **1** marks.

खण्ड—'अ'

(अति लघु उत्तरीय प्रश्न)

निर्देश :- सभी प्रश्नों के उत्तर दीजिए। आप अपने उत्तर को प्रश्नानुसार एक शब्द, एक वाक्य या अधिकतम **30** शब्दों में परिसीमित कीजिए। प्रत्येक प्रश्न **1** अंक का है।

1. (i) Represent complex number $2 + 2\sqrt{3}i$ in polar form.
सम्मिश्र संख्या $2 + 2\sqrt{3}i$ को ध्रुवीय रूप में व्यक्त कीजिए।
- (ii) Write formula for radius R of convergence of a power series $\sum a_n z^n$.
घात श्रेणी $\sum a_n z^n$ की अभिसरण त्रिज्या R ज्ञात करने के लिए सूत्र लिखिए।
- (iii) Write necessary condition for a conformal mapping representation.
अनुकोण प्रतिचित्रण के निरूपण के लिए आवश्यक प्रतिबन्ध लिखिए।
- (iv) Prove that function $u = \cos x \cdot \cosh y$ is harmonic.
सिद्ध कीजिए कि फलन $u = \cos x \cdot \cosh y$ प्रसंवादी है।
- (v) State the Cauchy's Inequality.
कॉशी असमिका का कथन कीजिए।
- (vi) Define Contour.
कंटूर को परिभाषित कीजिये।
- (vii) Find the residue of the function

$$f(z) = \frac{z^2}{(z-1)(z-2)(z-3)} \text{ at } z = 1$$

फलन $f(z) = \frac{z^2}{(z-1)(z-2)(z-3)}$ का $z = 1$ पर अवशेष ज्ञात कीजिए।

(Short Answer Type Questions)

Note :- Answer **any four** questions. Each answer should not exceed **200** words. Each question carries **5** marks.

खण्ड—'ब'

(लघु उत्तरीय प्रश्न)

निर्देश :- किन्हीं चार प्रश्नों के उत्तर दीजिए। आप अपने उत्तर को अधिकतम **200** शब्दों में परिसीमित कीजिए। प्रत्येक प्रश्न **5** अंक का है।

2. Show that function $f(z) = u + iv$, where -

$$f(z) = \frac{x^3(1+i) - y^3(1-i)}{x^2 + y^2}, (z \neq 0), f(0) = 0$$

is continuous at origin and satisfies Cauchy - Riemann equations at origin but $f'(z)$ is not exists at origin.

दर्शाइए कि फलन $f(z) = u + iv$, जहाँ -

$$f(z) = \frac{x^3(1+i) - y^3(1-i)}{x^2 + y^2}, (z \neq 0), f(0) = 0$$

मूल बिन्दु पर संतत है तथा मूल बिन्दु पर कोशी - रीमान समीकरण सन्तुष्ट होते हैं। यद्यपि $f'(z)$ का अस्तित्व मूल बिन्दु पर नहीं है।

3. Prove that -

$$\lim_{z \rightarrow i} \frac{3z^4 - 2z^3 + 8z^2 - 2z + 5}{z - i} = 4 + 4i$$

सिद्ध कीजिए कि -

$$\lim_{z \rightarrow i} \frac{3z^4 - 2z^3 + 8z^2 - 2z + 5}{z - i} = 4 + 4i$$

4. State and prove Cauchy integral theorem.

कोशी समाकलन प्रमेय को कथन कर सिद्ध कीजिए।

5. Find corresponding area of infinite strip $\frac{1}{4} < y < \frac{1}{2}$ under the transformation $w = \frac{1}{z}$.

रूपान्तर $w = \frac{1}{z}$ के अन्तर्गत अनन्त पट्टी $\frac{1}{4} < y < \frac{1}{2}$ का w - समतल में समवर्ती क्षेत्र ज्ञात कीजिए।

6. State and prove Morera's theorem.

मोरेरा प्रमेय को कथन कर सिद्ध कीजिए।

7. Describe singularities of function $f(z) = \frac{1}{z(e^z-1)}$ and expand function for $0 < |z| < 2\pi$.

फलन $f(z) = \frac{1}{z(e^z-1)}$ की विचित्रताओं की विवेचना करते हुए $0 < |z| < 2\pi$ के लिए फलन का प्रसार कीजिए।

8. Evaluate -

$$\int_0^\pi \frac{a d\theta}{a^2 + \sin^2\theta}, (a > 0)$$

मान ज्ञात कीजिए -

$$\int_0^\pi \frac{a d\theta}{a^2 + \sin^2\theta}, (a > 0)$$

9. Prove by line integral -

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin \pi x}{x^2 + 2x + 5} dx = -\pi e^{-2\pi}$$

परिरेखा समाकलन से सिद्ध कीजिए कि -

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x \sin \pi x}{x^2 + 2x + 5} dx = -\pi e^{-2\pi}$$

Section-C

2×10=20

(Long Answer Type Questions)

Note :- Answer **any two** questions. You have to delimit your each answer maximum up to **500** words. Each question carries **10** marks.

खण्ड-‘स’

(दीर्घ उत्तरीय प्रश्न)

निर्देश :- किन्हीं दो प्रश्नों के उत्तर दीजिए। आप अपने उत्तर को अधिकतम **500** शब्दों में परिसीमित कीजिए। प्रत्येक प्रश्न **10** अंक का है।

10. Prove that the derivatives of an analytic function is itself an analytic function.

किसी वैश्लेषिक फलन का अवकलन एवं वैश्लेषिक फलन होता है।

11. Obtain expansion for function $f(z) = \frac{1}{z^2 - 3z + 2}$ which are valid, for the regions.

(i) $|z| < 1$

(ii) $1 < |z| < 2$

(iii) $|z| > 2$

निम्न क्षेत्र में फलन $f(z) = \frac{1}{z^2 - 3z + 2}$ का प्रसार ज्ञात करो -

(i) $|z| < 1$

(ii) $1 < |z| < 2$

(iii) $|z| > 2$

12. State and prove fundamental theorem of integral calculus.

समाकलन के मूल प्रमेय का कथन कर सिद्ध कीजिए।

13. Explain the following -

(i) Analytic continuation along a chain of domains

(ii) Analytic continuation by a power series

(iii) Direct analytic continuation

निम्न को समझाइए –

(i) प्रांतों की श्रृंखला के अनुदिश विश्लेषिक सांतत्य

(ii) घात श्रेणी द्वारा विश्लेषिक सांतत्य

(iii) सीधा विश्लेषिक सांतत्य
