MT-04

December - Examination 2025
B.A./B.Sc. (Part-II) Examination
MATHEMATICS
REAL ANALYSIS & METRIC SPACE
Paper : MT-04

[*Time: **3** Hours*] [*Maximum Marks: **47***]

Note :- The question paper is divided into three Sections A, B and C. Write answers as per the given instructions.

निर्देश :– यह प्रश्न–पत्र 'अ', 'ब' और 'स' तीन खण्डों में विभाजित है। प्रत्येक खण्ड के निर्देशानुसार प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

Section-A **7×1=7**

(Very Short Answer Type Questions)

Note :- Answer all questions. As per the nature of the question delimit your answer in one word, one sentence or maximum up to **30** words. Each question carries **1** marks.

खण्ड–'अ'

(अति लघु उत्तरीय प्रश्न)

निर्देश :– सभी प्रश्नों के उत्तर दीजिए। आप अपने उत्तर को प्रश्नानुसार एक शब्द, एक वाक्य या अधिकतम 30 शब्दों में परिसीमित कीजिए। प्रत्येक प्रश्न 1 अंक का है।

1. (i) Define bounded below set.

   नीचे से परिबद्ध समुच्चय को परिभाषित कीजिए।

   (ii) State Bolzano-Weierstrass Theorem.

   बोल्ज़ानो–वीयरस्ट्रास प्रमेय का कथन लिखिए।

   (iii) State Boundedness Theorem.

   परिबद्धता प्रमेय का कथन लिखिए।

   (iv) Define Cauchy's Sequences.

   कॉशी अनुक्रम को परिभाषित कीजिए।

   (v) Define norm of a partition.

   विभाजन के मानक को परिभाषित कीजिए।

   (vi) Define Darboux Space.

   डार्बू योग को परिभाषित कीजिए।

   (vii) Define a closed set in metric space.

   दूरिक समष्टि में सवृंत समुच्चय को परिभाषित कीजिए।

Section-B $4 \times 5 = 20$

(Short Answer Type Questions)

Note :- Answer **any four** questions. Each answer should not exceed **200** words. Each question carries **5** marks.

खण्ड–'ब'

(लघु उत्तरीय प्रश्न)

निर्देश :– **किन्हीं चार** प्रश्नों के उत्तर दीजिए। आप अपने उत्तर को अधिकतम **200** शब्दों में परिसीमित कीजिए। प्रत्येक प्रश्न **5** अंक का है।

2. Prove that the union of an arbitrary family of open set is an open.

   सिद्ध कीजिए कि विवृत्त समुच्चयों के प्रत्येक समुदाय का संघ भी एक विवृत्त समुच्चय होता है।

3. Using Cauchy's principle for convergence prove that sequence

   $x_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ is convergent.

   कोशी के सामान्य अभिसरण सिद्धान्त से सिद्ध कीजिए कि अनुक्रम

   $x_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \cdots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ अभिसारी है।

4. Show that the following function f is continuous but not differentiable at $x = 0$:

   सिद्ध कीजिए कि निम्न फलन f बिन्दु $x = 0$ पर संतत है, किन्तु अवकलनीय नहीं है –

   $$f(x) = \begin{cases} x\sin(1/x) & , \quad x \neq 0 \\ 0 & , \quad x = 0 \end{cases}$$

5. Prove that every continuous function is R-integrable.

   सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक संतत फलन R–समाकलनीय होता है।

6. Show that the series $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$ converges uniformly on R.

   प्रदर्शित कीजिए कि श्रेणी $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos nx}{n^2}$, R में एकसमान अभिसारी है।

7. Prove that a subset A of a metric space X is closed if and only if $\overline{A} = A$.

   सिद्ध कीजिए कि किसी दूरिक समष्टि X का कोई उपसमुच्चय A संवृत होता है, यदि और केवल यदि $\overline{A} = A$.

8. Prove that in a metric space each closed sphere is a closed set.

   सिद्ध कीजिए कि एक दूरिक समष्टि में प्रत्येक संवृत गोला एक संवृत समुच्चय होता है।

9. Let the mapping $d : R \times R \to R$ be defined by : $d(x, y) = |x - y|, \ \forall x, y \in R$ then d is a metric for R, which is known as usual metric.

   मान लीजिए कि एक R वास्तविक संख्याओं का समुच्चय है। एक फलन $d : R \times R \to R$ निम्न प्रकार परिभाषित है: $d(x, y) = |x - y|, \ \forall x, y \in R$ तब (R, d) एक दूरिक समष्टि है।

Section-C 2×10=20

(Long Answer Type Questions)

Note :- Answer **any two** questions. You have to delimit your each answer maximum up to **500** words. Each question carries **10** marks.

खण्ड–'स'

(दीर्घ उत्तरीय प्रश्न)

निर्देश :– **किन्हीं दो** प्रश्नों के उत्तर दीजिए। आप अपने उत्तर को अधिकतम **500** शब्दों में परिसीमित कीजिए। प्रत्येक प्रश्न **10** अंक का है।

10. If f is defined on [a, b] by $f(x) = k\ \forall\ x \in [a, b]$ where k is constant, then $f \in R\,[a, b]$ and $\int_a^b k\,dx = k\,(b - a)$.

    सिद्ध कीजिए कि अचर फलन R–समाकलनीय होता है या यदि [a, b] पर फलन $f(x) = k$ अचर है, तो $f \in R\,[a, b]$ तथा $\int_a^b k\,dx = k\,(b - a)$.

11. Prove that if a function f is continuous in [a, b], then it attains its supremum and infimum at least once in [a, b].

    सिद्ध कीजिए कि यदि फलन f संवृत्त अन्तराल [a, b] में संतत है, तो वह उस अन्तराल में कम से कम एक बार अपने उच्चक एवं निम्नक को ग्रहण करता है।

12. Test for uniform convergence the sequence $\{f_n(x)\}$, where $f_n(x) = nx\,(1 - x)^n$, when $0 \le x \le 1$.

    अनुक्रम $\{f_n(x)\}$ का एकसमान अभिसारी के लिए परीक्षण कीजिए, जहाँ $f_n(x) = nx\,(1 - x)^n$, जब $0 \le x \le 1$.

13. Let the mapping $d : R \times R \to R$ defined by :

    $$d(x,\ y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ 1 & x \neq y \end{cases} \quad \forall\ x, y \in R$$

    Prove that (R, d) is a metric space.

    माना कि प्रतिचित्रण $d : R \times R \to R$ निम्न प्रकार परिभाषित है :

    $$d(x,\ y) = \begin{cases} 0 & x = y \\ 1 & x \neq y \end{cases} \quad \forall\ x, y \in R$$

    सिद्ध कीजिए (R, d) एक दूरिक समष्टि है।
