MT–09

December – Examination 2023

B.A./B.Sc. (Part III) Examination

MATHEMATICS

(Mechanics)

Paper : MT–09

*Time : **3** Hours*] [*Maximum Marks : **46***

Note :– The question paper is divided into three Sections A, B and C. Write answers as per the given instructions. Use of non-programmable scientific calculator is allowed in this paper.

निर्देश :- यह प्रश्न-पत्र 'अ', 'ब' और 'स' तीन खण्डों में विभाजित है। प्रत्येक खण्ड के निर्देशानुसार प्रश्नों के उत्तर दीजिए। इस प्रश्न-पत्र में नॉन-प्रोग्रामेबल साइंटिफिक कैलकुलेटर के उपयोग की अनुमति है।

Section–A 6×1=6

(Very Short Answer Type Questions)

Note :– Answer all questions. As per the nature of the question delimit your answer in one word, one sentence or maximum up to **30** words. Each question carries 1 mark.

खण्ड–अ

(अति लघु उत्तरीय प्रश्न)

निर्देश :- सभी प्रश्नों के उत्तर दीजिए। आप अपने उत्तर को प्रश्नानुसार एक शब्द, एक वाक्य या अधिकतम **30** शब्दों में परिसीमित कीजिए। प्रत्येक प्रश्न 1 अंक का है।

1. (i) Write the formula of transverse velocity.

   अनुप्रस्थ वेग का सूत्र लिखिए।

   (ii) Write resultant of two forces P and Q acting at a point and inclined at an angle α.

   एक बिन्दु पर लगे दो बलों P व Q के परिणामी लिखिए जिनके मध्य कोण α है।

   (iii) What is Frequency ?

   आवृत्ति किसे कहते हैं ?

   (iv) Write the Kepler's law.

   केप्लर नियम को लिखिए।

   (v) Write the definition of apsidal angle.

   स्तब्धिका कोण की परिभाषा लिखिए।

   (vi) Write the formula of reciprocal polar form of central orbit.

   सकेन्द्र कक्षा की समीकरण के व्युत्क्रम ध्रुवी रूप का सूत्र लिखिए।

Section–B 4×5=20

(Short Answer Type Questions)

Note :– Answer any *four* questions. Each answer should not exceed **200** words. Each question carries 5 marks.

खण्ड—ब

(लघु उत्तरीय प्रश्न)

निर्देश :- किन्हीं **चार** प्रश्नों के उत्तर दीजिए। आप अपने उत्तर को अधिकतम **200** शब्दों में परिसीमित कीजिए। प्रत्येक प्रश्न 5 अंक का है।

2. State and prove triangle law of forces.

   बल त्रिभुज नियम लिखिए व सिद्ध कीजिए।

3. If a particle moves in a straight line and its motion is given by $x = t^3 - 9t^2 + 24t + 6$, then find its velocity and position where the acceleration is zero.

   यदि कोई कण एक सीधी रेखा में चलता है और उसकी गति $x = t^3 - 9t^2 + 24t + 6$ द्वारा दी गई है, तो उसका वेग और स्थिति ज्ञात कीजिए जहाँ त्वरण शून्य है।

4. State and verify Lami's theorem.

   लामी के प्रमेय को बताइए और सत्यापित कीजिए।

5. If the radial and transverse velocities of a particle are proportional to each other, show that the path is an equiangular spiral.

   यदि एक कण इस प्रकार गमन करता है कि उसका अरीय वेग, अनुप्रस्थ वेग के समानुपाती होता है तो सिद्ध कीजिए इसका वक्र एक समान कोणिक सर्पिल होगा।

6. Discuss the subsequent motion of a particle which is projected from the lowest point with some velocity and moves along the inside of a smooth vertical circle.

   कोई कण किसी चिकने उर्ध्वाधर वृत्त के सबसे नीचे के बिन्दु से किसी वेग से फेंका जाता है जो वृत्त के अन्दर की ओर गमन करे तो इसकी गति की विवेचना कीजिए।

7. A body moving in a straight line OAB with S.H.M. has zero velocity when at the points A and B whose distance from O are a and b respectively, and has velocity v when half way between them. Show that the complete period is $\pi(b - a)/v$.

एक पिण्ड एक सरल रेखा OAB पर सरल आवर्त गति से गतिमान है। यह A तथा B पर विरामावस्था में है जिसकी O से दूरी क्रमशः a तथा b है और उसका वेग v है जब वह उनके मध्य बिन्दु पर है। प्रदर्शित कीजिए कि पूर्ण आवर्तकाल $\pi(b-a)/v$ है।

8. The greatest and least velocities of a certain planet in its orbit round the sun are 30 and 29.2 kilometers per second. Find the eccentricity of the orbit.

किसी ग्रह का सूर्य के चारों ओर अपनी सकेन्द्र कक्षा में अधिकतम एवं न्यूनतम वेग क्रमशः 30 और 29.2 किमी/सेकण्ड हैं। सकेन्द्र कक्षा की उत्केन्द्रता ज्ञात कीजिए।

9. Find moment of inertial of elliptic disc of radius a and mass M about its major axis.

M द्रव्यमान व a त्रिज्या वाली दीर्घवृत्तीय पटल का जड़त्व आघूर्ण उसकी दीर्घअक्ष के सापेक्ष ज्ञात कीजिए।

Section–C 2×10=20

(Long Answer Type Questions)

Note :– Answer any *two* questions. You have to delimit your each answer maximum up to **500** words. Each question carries 10 marks.

खण्ड—स

(दीर्घ उत्तरीय प्रश्न)

निर्देश :- किन्हीं **दो** प्रश्नों के उत्तर दीजिए। आप अपने उत्तर को अधिकतम **500** शब्दों में परिसीमित कीजिए। प्रत्येक प्रश्न 10 अंक का है।

10. A perfectly rough plane is inclined at an angle α to the horizon. Show that the least eccentricity of the ellipse which can rest on the plane is :

$$\sqrt{\left(\frac{2\sin\alpha}{1+\sin\alpha}\right)}$$

एक पूर्ण रूक्ष तल क्षैतिज से कोण α पर झुका हुआ है। प्रदर्शित कीजिए कि तल पर विरामावस्था में रह सकने वाले दीर्घवृत्त की न्यूनतम उत्केन्द्रता है :

$$\sqrt{\left(\frac{2\sin\alpha}{1+\sin\alpha}\right)}$$

11. The radial and transverse velocities of a particle are λr and $\mu\theta$. Find its path the show that its radial and transverse components of acceleration are respectively :

$$\lambda^2 r = \frac{\mu^2\theta^2}{r} \text{ and } \mu\theta = \left(\lambda + \frac{\mu}{r}\right).$$

किसी कण के अरीय एवं अनुप्रस्थ वेग λ r तथा μ θ हैं। इसका पथ ज्ञात कीजिए और सिद्ध कीजिए कि इसके अरीय एवं अनुप्रस्थ त्वरण क्रमशः

$$\lambda^2 r = \frac{\mu^2\theta^2}{r} \text{ एवं } \mu\theta = \left(\lambda + \frac{\mu}{r}\right) \text{ हैं।}$$

12. One end of a light elastic string of natural length a and modulus $2\,mg$ is attached to a fixed point O and the other end held at rest at O, is allowed to fall. Find the greatest extension of the string and show that the particle will reach again after a time :

$$(\pi + 2 - \tan^{-1} 2)\sqrt{\frac{2a}{g}}$$

एक प्रत्यास्थ डोरी की स्वाभाविक लम्बाई a और प्रत्यास्थ मापांक $2\,mg$ है। इसका एक सिरा बिन्दु O पर बंधा है और दूसरे सिरे से m द्रव्यमान का कण बांधा गया है। कण को बिन्दु O पर ले जाकर विरामावस्था से गिराया गया। डोरी का उच्चतम विस्तार ज्ञात कीजिए और सिद्ध कीजिए कि कण वापिस बिन्दु O पर निम्न समय के बाद पहुँचेगा :

$$(\pi + 2 - \tan^{-1} 2)\sqrt{\frac{2a}{g}}$$

13. The velocity at any point of a central orbit is $\frac{1}{n}$th of what it would be for a circular orbit at the same distance. Show that central force varies as $\frac{1}{r^{2n^2+1}}$ and that the equation of the orbit is :

$$r^{2n^2+1} = a^{n^2-1}\cos(n^2-1)\theta$$

सकेन्द्र कक्षा के किसी बिन्दु पर वेग एक वृत्तीय सकेन्द्र कक्षा के एक बिन्दु जिसकी ध्रुव से दूरी उतनी है जितनी कि पहले बिन्दु की है, के वेग के $\frac{1}{n}$ भाग के बराबर है तो सिद्ध कीजिए कि केन्द्रीय बल $\frac{1}{r^{2n^2+1}}$ के समानुपाती है तथा केन्द्रीय कक्षा का समीकरण निम्न है :

$$r^{2n^2+1} = a^{n^2-1}\cos(n^2-1)\theta$$