

MT-08

December – Examination 2023

B.A./B.Sc. (Part III) Examination

MATHEMATICS

(Complex Analysis)

Paper : MT-08

Time : 3 Hours]

[Maximum Marks : 47

Note :- The question paper is divided into three Sections 'A', 'B' and 'C'. Write answers as per the given instructions. Use of non-programmable scientific calculator is allowed in this paper.

निर्देश :- यह प्रश्न-पत्र 'अ', 'ब' और 'स' तीन खण्डों में विभाजित है। प्रत्येक खण्ड के निर्देशानुसार प्रश्नों के उत्तर दीजिए। इस प्रश्न-पत्र में नॉन-प्रोग्रामेबल साइंटिफिक कैलकुलेटर के उपयोग की अनुमति है।

Section-A

7×1=7

(Very Short Answer Type Questions)

Note :- Answer all questions. As per the nature of the question delimit your answer in one word, one sentence or maximum up to **30** words. Each question carries 1 mark.

MT-08/7

(1)

TC-298 Turn Over

खण्ड—अ

(अति लघु उत्तरीय प्रश्न)

निर्देश :- सभी प्रश्नों के उत्तर दीजिए। आप अपने उत्तर को प्रश्नानुसार एक शब्द, एक वाक्य या अधिकतम **30** शब्दों में परिसीमित कीजिए। प्रत्येक प्रश्न 1 अंक का है।

1. (i) Find the equation of circle in complex form whose centre is a and radius is r .

उस वृत्त का समीकरण सम्मिश्र रूप में ज्ञात कीजिए जिसका केन्द्र a तथा त्रिज्या r है।

(ii) State Heine-Borel Theorem.

हेन-बोरेल प्रमेय का कथन कीजिए।

(iii) Define limit of a complex function.

सम्मिश्र फलन की सीमा को परिभाषित कीजिए।

(iv) Prove that function $u = \cos x \cdot \cosh y$ is harmonic.

सिद्ध कीजिए कि फलन $u = \cos x \cdot \cosh y$ प्रसंवादी है।

MT-08/7

(2)

TC-298

(v) Define conditional convergence of power series.

घात श्रेणी सशर्त अभिसरण को परिभाषित कीजिए।

(vi) Define Jordan arc.

जोरदाँ वक्र को परिभाषित कीजिए।

(vii) Write Poisson's Integral Formula.

प्लासों का समाकल सूत्र लिखिए।

Section-B

4×5=20

(Short Answer Type Questions)

Note :- Answer any *four* questions. Each answer should not exceed **200** words. Each question carries 5 marks.

खण्ड-ब

(लघु उत्तरीय प्रश्न)

निर्देश :- किन्हीं **चार** प्रश्नों के उत्तर दीजिए। आप अपने उत्तर को अधिकतम **200** शब्दों में परिसीमित कीजिए। प्रत्येक प्रश्न 5 अंक का है।

2. Prove that a stereographic projection projects circles into circles or straight line.

सिद्ध कीजिए कि एक त्रिविम प्रक्षेप, वृत्तों को वृत्तों में या सरल रेखाओं में प्रक्षेप करता है।

3. Prove that if $f(z)$ is continuous in a compact set S then it is uniformly continuous in S .

सिद्ध कीजिए कि यदि $f(z)$ एक संहत समुच्चय S में संतत हो तो वह S में एकसमान संतत होता है।

4. Prove that bilinear transformation transforms circles and straight lines into circles or lines.

सिद्ध कीजिए कि द्विरैखिक रूपान्तरण, वृत्तों एवं सरल रेखाओं को वृत्तों या रेखाओं में प्रतिचित्रित करता है।

5. Evaluate :

$$\int_C (z^2 + 3z + 2)dz$$

where C is arc of Cycloid $x = a(\theta + \sin \theta)$, $y = a(1 - \cos \theta)$ between points $(0, 0)$ and $(\pi a, 2a)$.

मान ज्ञात कीजिए :

$$\int_C (z^2 + 3z + 2)dz$$

जहाँ C चक्रज $x = a(\theta + \sin \theta)$, $y = a(1 - \cos \theta)$ का बिन्दुओं $(0, 0)$ तथा $(\pi a, 2a)$ के मध्य चाप है।

6. State and prove Morera's theorem.

मोरेरा प्रमेय को कथन कर सिद्ध कीजिए।

7. Find the residues of functions :

$$\frac{z}{(z-a)(z-b)} \text{ and } \frac{z^3 - z^2 + 1}{z^3}$$

at infinity.

फलनों :

$$\frac{z}{(z-a)(z-b)} \text{ और } \frac{z^3 - z^2 + 1}{z^3}$$

के अनंत पर अवशेष ज्ञात कीजिए।

8. Prove that every polynomial of degree $n \geq 1$ has at least one zero.

सिद्ध कीजिए कि कोटि $n \geq 1$ के प्रत्येक बहुपद का कम-से-कम एक शून्य होता है।

9. Prove that analytic continuation of function can be done outside the convergence circle :

$$f(z) = 1 + z + z^2 + z^3 + \dots + z^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

सिद्ध कीजिए कि फलन :

$$f(z) = 1 + z + z^2 + z^3 + \dots + z^n + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} z^n$$

का इसके अभिसरण वृत्त के बाहर सांतत्य किया जा सकता है।

Section-C

2×10=20

(Long Answer Type Questions)

Note :- Answer any *two* questions. You have to delimit your each answer maximum up to **500** words. Each question carries 10 marks.

खण्ड—स

(दीर्घ उत्तरीय प्रश्न)

निर्देश :- किन्हीं दो प्रश्नों के उत्तर दीजिए। आप अपने उत्तर को अधिकतम **500** शब्दों में परिसीमित कीजिए। प्रत्येक प्रश्न 10 अंक का है।

10. (a) Derive Cauchy-Riemann equations in polar form.

ध्रुवीय रूप से कॉशी-रीमान समीकरणों को व्युत्पन्न कीजिए।

(b) Show that function $f(z) = e^{-z^{-4}}$, ($z \neq 0$) and $f(0) = 0$ is not regular at $z = 0$ although Cauchy-Riemann equations are satisfied at origin.

प्रदर्शित कीजिए कि फलन $f(z) = e^{-z^{-4}}$, ($z \neq 0$) और $f(0) = 0$, $z = 0$ पर नियमित नहीं है, यद्यपि इस बिन्दु पर कॉशी-रीमान समीकरण सन्तुष्ट होती है।

11. Describe the transformation $w = \sin z$.

रूपान्तरण $w = \sin z$ की विवेचना कीजिए।

12. State and prove Laurent's theorem for expansion of function.

फलनों के प्रसार के लिए लॉरेंट प्रमेय को कथन कर सिद्ध कीजिए।

13. Prove by line integral :

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{\sqrt{x}} = \int_0^\infty \frac{\cos x}{\sqrt{x}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$

परिरेखा समाकलन से, सिद्ध कीजिए कि :

$$\int_0^\infty \frac{\sin x}{\sqrt{x}} = \int_0^\infty \frac{\cos x}{\sqrt{x}} = \sqrt{\frac{\pi}{2}}$$