MT–07

December – Examination 2023

B.A./B.Sc. (Part III) Examination

MATHEMATICS

(Algebra)

Paper : MT-07

Time : 1½ Hours] [*Maximum Marks : **47***

Note :– The question paper is divided into three Sections A, B and C. Use of non-programmable scientific calculator is allowed in this paper.

निर्देश :– यह प्रश्न-पत्र 'अ', 'ब' और 'स' तीन खण्डों में विभाजित है। इस प्रश्न-पत्र में नॉन-प्रोग्रामेबल साइंटिफिक कैलकुलेटर के उपयोग की अनुमति है।

Section–A 7×1=7

(Very Short Answer Type Questions)

Note :– Answer all questions. As per the nature of the question delimit your answer in one word, one sentence or maximum up to **30** words. Each question carries 1 mark.

खण्ड—अ

(अति लघु उत्तरीय प्रश्न)

निर्देश :– सभी प्रश्नों के उत्तर दीजिए। आप अपने उत्तर को प्रश्नानुसार एक शब्द, एक वाक्य या अधिकतम **30** शब्दों में परिसीमित कीजिए। प्रत्येक प्रश्न 1 अंक का है।

1. (i) Define group.

   समूह को परिभाषित कीजिए।

   (ii) Define order of an element in a group.

   समूह में किसी अवयव की कोटि को परिभाषित कीजिए।

   (iii) Prove that finite group of prime order does not have any proper subgroup.

   सिद्ध कीजिए कि अभाज्य कोटि के परिमित समूह का कोई उचित उपसमूह नहीं होता है।

   (iv) Define isomorphism.

   तुल्यकारिता को परिभाषित कीजिए।

   (v) Define division ring.

   भागफल वलय को परिभाषित कीजिए।

(vi) Define vector space.

सदिश समष्टि को परिभाषित कीजिए।

(vii) Define linear combination of vectors.

सदिशों का एकघात संचय को परिभाषित कीजिए।

Section–B **4×5=20**

(Short Answer Type Questions)

Note :– Answer any *four* questions. Each answer should not exceed **200** words. Each question carries 5 marks.

खण्ड—ब

(लघु उत्तरीय प्रश्न)

निर्देश :- किन्हीं **चार** प्रश्नों के उत्तर दीजिए। आप अपने उत्तर को अधिकतम **200** शब्दों में परिसीमित कीजिए। प्रत्येक प्रश्न 5 अंक का है।

2. Show that set :

$$G = \{a + b\sqrt{2}\,;\ a,\ b \in Q\}$$

is commutative group for addition operation.

प्रदर्शित कीजिए कि समुच्चय :

$$G = \{a + b\sqrt{2}\,;\ a,\ b \in Q\}$$

योग संक्रिया के लिए क्रमविनिमेय समूह है।

3. State and prove Lagrange's theorem.

लेग्रेंज प्रमेय को कथन कर सिद्ध कीजिए।

4. Find permutation group of group

$$G = \{1, -1, i, -i\}$$

with multiplication operation, which is isomorphic to group G.

गुणन संक्रिया वाले समूह :

$$G = \{1, -1, i, -i\}$$

का क्रमचय समूह ज्ञात कीजिए जो G के साथ तुल्यकारी है।

5. Show that characteristic of an integral domain is either zero or prime number.

प्रदर्शित कीजिए कि पूर्णांकीय प्रान्त का अभिलक्षण शून्य अथवा एक अभाज्य संख्या होती है।

6. Prove that field of rational numbers (Q, +, **.**) is a prime field.

सिद्ध कीजिए कि परिमेय संख्याओं का क्षेत्र (Q, +, **.**) एक अभाज्य क्षेत्र होता है।

7. Prove that ideal of commutative ring with unity R is maximal ideal if quotient ring $\frac{R}{I}$ is a field.

सिद्ध कीजिए कि इकाई सहित क्रमविनिमेय वलय R की गुणजावली उच्चिष्ठ गुणजावली होती है, यदि विभाग वलय $\frac{R}{I}$ क्षेत्र है।

8. Prove that every linearly independent set of a finite dimensional vector space V(F) can be expanded to be a basis of vector space.

सिद्ध कीजिए कि किसी परिमित विमीय सदिश समष्टि V(F) का प्रत्येक एकघाततः स्वतन्त्र समुच्चय बढ़ाकर आधार बनाया जा सकता है।

9. If V(F) is a vector space whose dimension is 6 and U, W are any two different subspaces of V(F), whose dimensions are 4. Then find possibilities of dimension of $U \cap W$.

यदि V(F) एक सदिश समष्टि है जिसकी विमा 6 है और U, W इसकी दो भिन्न-भिन्न उपसमष्टियाँ हैं जिनकी विमा 4 है, तो $U \cap W$ के विमा की सम्भावनाएँ ज्ञात कीजिए।

Section–C 2×10=20

(Long Answer Type Questions)

Note :– Answer any *two* questions. You have to delimit your each answer maximum up to **500** words. Each question carries 10 marks.

खण्ड—स

(दीर्घ उत्तरीय प्रश्न)

निर्देश :- किन्हीं **दो** प्रश्नों के उत्तर दीजिए। आप अपने उत्तर को अधिकतम **500** शब्दों में परिसीमित कीजिए। प्रत्येक प्रश्न 10 अंक का है।

10. (a) If a and b are any two arbitrary elements of group G, then prove that $O(b^{-1}ab) = O(a)$.

यदि a तथा b समूह G के कोई दो स्वेच्छ अवयव हैं, तब सिद्ध कीजिए कि $O(b^{-1}ab) = O(a)$।

(b) Prove that infinite cyclic group has two and only two generators.

सिद्ध कीजिए कि अपरिमित चक्रीय समूह के दो और केवल दो जनक होते हैं।

11. (a) If H is a subgroup of index 2 in group G, then prove that H is a normal subgroup of G.

यदि H, G में सूचकांक 2 का एक उपसमूह है, तब सिद्ध कीजिए कि H, G का एक प्रसामान्य उपसमूह होता है।

(b) If p is a prime number and G is a non-commutative group of order p^3, then show that $O(Z(G)) = p$, where Z(G) is centre of group G.

यदि p एक अभाज्य संख्या है और G कोटि p^3 का एक अक्रमविनिमेय समूह है, तो दर्शाइये कि $O(Z(G)) = p$, जहाँ Z(G) समूह G का केन्द्र है।

12. If operations $\oplus$ and $\odot$ are defined on set of real numbers R, where

$$a \oplus b = a + b + 1$$

and

$$a \odot b = a + b + ab, \forall a, b \in R$$

then prove that $(R, \oplus, \odot)$ is a commutative ring with unity.

यदि $\oplus$ एवं $\odot$ वास्तविक संख्याओं के समुच्चय R पर परिभाषित संक्रियाएँ हैं, जहाँ

$$a \oplus b = a + b + 1$$

तथा

$$a \odot b = a + b + ab, \forall a, b \in R$$

तब सिद्ध कीजिए कि $(R, \oplus, \odot)$ एक इकाई अवयव सहित क्रमविनिमेय वलय है।

13. Prove that Quotient field of integral domain D is smallest field which contains D.

सिद्ध कीजिए कि पूर्णांकीय प्रान्त D का विभाग क्षेत्र D को समाहित करने वाला सबसे छोटा क्षेत्र होता है।