MT–04

December – Examination 2023

B.A./B.Sc. (Part II) Examination

MATHEMATICS

(Real Analysis and Metric Space)

Paper : MT-04

*Time : **3** Hours*] [*Maximum Marks : **47***

Note :– The question paper is divided into three Sections A, B and C. Write answers as per the given instructions.

निर्देश :- यह प्रश्न-पत्र 'अ', 'ब' और 'स' तीन खण्डों में विभाजित है। प्रत्येक खण्ड के निर्देशानुसार प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

Section–A

(Very Short Answer Type Questions)

Note :– Answer all questions. As per the nature of the question delimit your answer in one word, one sentence or maximum up to **30** words. Each question carries 1 mark.

खण्ड–अ

(अति लघु उत्तरीय प्रश्न)

निर्देश :- सभी प्रश्नों के उत्तर दीजिए। आप अपने उत्तर को प्रश्नानुसार एक शब्द, एक वाक्य या अधिकतम **30** शब्दों में परिसीमित कीजिए। प्रत्येक प्रश्न 1 अंक का है।

1. (i) Define infimum greatest lower bound.

निम्नक को परिभाषित कीजिए।

(ii) Define open set.

विवृत्त समुच्चय को परिभाषित कीजिए।

(iii) Define monotonic sequence.

एकदिष्ट अनुक्रम को परिभाषित कीजिए।

(iv) Define Cauchy's sequence.

कॉशी अनुक्रम को परिभाषित कीजिए।

(v) Define norm of a partition.

विभाजन का मानक को परिभाषित कीजिए।

(vi) Define partial sum function.

आंशिक योग फलन को परिभाषित कीजिए।

(vii) Define closed sphere.

संवृत्त गोलक को परिभाषित कीजिए।

Section–B

(Short Answer Type Questions)

Note :– Answer any *four* questions. Each answer should not exceed **200** words. Each question carries 5 marks.

खण्ड—ब

(लघु उत्तरीय प्रश्न)

निर्देश :- किन्हीं **चार** प्रश्नों के उत्तर दीजिए। आप अपने उत्तर को अधिकतम **200** शब्दों में परिसीमित कीजिए। प्रत्येक प्रश्न 5 अंक का है।

2. Prove that between any *two* different real numbers, there lie an infinite number of rational numbers.

सिद्ध कीजिए कि किन्हीं **दो** भिन्न वास्तविक संख्याओं के मध्य अनन्त परिमेय संख्याएँ विद्यमान होती हैं।

3. Prove that compact subset of real numbers is closed and bounded.

सिद्ध कीजिए कि वास्तविक संख्याओं का प्रत्येक संहत उपसमुच्चय संवृत्त एवं परिबद्ध होता है।

4. Prove that every convergent sequence is bounded.

सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक अभिसारी अनुक्रम परिबद्ध होता है।

5. Examine for continuity of the following function at $x = 2$:

$$\text{Where } f(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{4} & ; \quad 0 < x < 2 \\ 2 & ; \quad x = 2 \\ 4 - \frac{8}{x^2} & ; \quad x > 2 \end{cases}$$

निम्न फलन f की $x = 2$ पर सांतत्य जाँच कीजिए :

$$\text{जहाँ } f(x) = \begin{cases} \frac{x^3}{4} & ; \quad 0 < x < 2 \\ 2 & ; \quad x = 2 \\ 4 - \frac{8}{x^2} & ; \quad x > 2 \end{cases}$$

6. Verify Rolle's theorem for the following function in the interval [2, 6] :

$$f(x) = 8x - x^2$$

अंतराल [2, 6] में फलन $f(x) = 8x - x^2$ के लिए रोले प्रमेय का परीक्षण कीजिए।

7. Every monotonic function is R-integrable.

प्रत्येक एकदिष्ट फलन रीमान समाकलनीय होता है।

8. Let the mapping $d : R \times R \to R$ be defined by $d(x, y) = |x - y|$, $\forall\ x, y \in R$ then d is a metric for R, which is known as usual metric.

मान लीजिए कि एक R वास्तविक संख्याओं का समुच्चय है। एक फलन $d : R \times R \to R$ निम्न प्रकार परिभाषित है :

$$d(x, y) = |x - y|, \forall\ x, y \in R$$

तब (R, d) एक दूरीक समष्टि है।

9. Prove that in a metric space each closed sphere is a closed set.

सिद्ध कीजिए कि एक दूरीक समष्टि में प्रत्येक संवृत्त गोला एक संवृत्त समुच्चय होता है।

Section–C

(Long Answer Type Questions)

Note :– Answer any *two* questions. You have to delimit your each answer maximum up to **500** words. Each question carries 10 marks.

खण्ड—स

(दीर्घ उत्तरीय प्रश्न)

निर्देश :- किन्हीं **दो** प्रश्नों के उत्तर दीजिए। आप अपने उत्तर को अधिकतम **500** शब्दों में परिसीमित कीजिए। प्रत्येक प्रश्न 10 अंक का है।

10. Show that the following function f is continuous but not differentiable at $x = 2$:

$$f(x) = \begin{cases} 1+x, & x < 2 \\ 5-x, & x \geq 2 \end{cases}$$

सिद्ध कीजिए कि निम्न फलन $x = 2$ पर संतत किन्तु अवकलनीय नहीं है :

$$f(x) = \begin{cases} 1+x, & x < 2 \\ 5-x, & x \geq 2 \end{cases}$$

11. If f is defined on $[a, b]$ by $f(x) = k$, $\forall\ x \in [a, b]$ where k is constant, then $f \in R\ [a, b]$ and :

$$\int_a^b k\,dx = k(b-a)$$

सिद्ध कीजिए कि अचर फलन R-समाकलनीय होता है या यदि $[a, b]$ पर फलन $f(x) = k$ अचर है तो $f \in R\ [a, b]$ तथा :

$$\int_a^b k\,dx = k(b-a)$$

12. Evaluate :

$$\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)+\left(1+\frac{2}{n}\right).....\left(1+\frac{n}{n}\right)\right]^{1/n}$$

मान ज्ञात कीजिए :

$$\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)+\left(1+\frac{2}{n}\right).....\left(1+\frac{n}{n}\right)\right]^{1/n}$$

13. Let (X, d) be a metric space then prove that the mapping defined below is also a mertic in X :

$$D(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)} \qquad \forall x, y \in X$$

माना कि (X, d) एक दूरीक समष्टि है तथा दर्शाइए कि निम्न रूप से परिभाषित फलन भी X में एक दूरीक समष्टि है :

$$D(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)} \qquad \forall x, y \in X$$