

MT-02

December – Examination 2023

B.A./B.Sc. (Part-I) Examination

MATHEMATICS

(Calculus and Differential Equations)

Paper : MT-02

Time : 3 Hours]

[Maximum Marks : 47

Note :- The question paper is divided into three Sections A, B and C. Use of non-programmable scientific calculator is allowed in this paper.

निर्देश :- यह प्रश्न-पत्र 'अ', 'ब' और 'स' तीन खण्डों में विभाजित है। इस प्रश्न-पत्र में नॉन-प्रोग्रामेबल साइंटिफिक कैलकुलेटर के उपयोग की अनुमति है।

Section-A

7×1=7

(Very Short Answer Type Questions)

Note :- Answer all questions. As per the nature of the question delimit your answer in one word, one sentence or maximum up to 30 words. Each question carries 1 mark.

MT-02/8

(1)

TC-292 Turn Over

खण्ड—अ

(अति लघु उत्तरीय प्रश्न)

निर्देश :- सभी प्रश्नों के उत्तर दीजिए। आप अपने उत्तर को प्रश्नानुसार एक शब्द, एक वाक्य या अधिकतम 30 शब्दों में परिसीमित कीजिए। प्रत्येक प्रश्न 1 अंक का है।

1. (i) Write comparison test for convergence of series.
श्रेणी के अभिसरण के लिए तुलना परीक्षण लिखिए।
- (ii) Define centre of curvature.
वक्रता केन्द्र को परिभाषित कीजिए।
- (iii) Define Asymptotes.
अनंत स्पर्शी को परिभाषित कीजिए।
- (iv) Define Cusp.
उभयाग्र को परिभाषित कीजिए।
- (v) Define Envelope.
अन्वालोप को परिभाषित कीजिए।
- (vi) Define Rectification.
चापकलन को परिभाषित कीजिए।
- (vii) Evaluate :

$$\sqrt{-\frac{1}{2}}$$

मान ज्ञात कीजिए :

$$\sqrt{-\frac{1}{2}}$$

MT-02/8

(2)

TC-292

Section-B**4×5=20****(Short Answer Type Questions)**

Note :- Answer any *four* questions. Each answer should not exceed **200** words. Each question carries 5 marks.

खण्ड—ब**(लघु उत्तरीय प्रश्न)**

निर्देश :- किन्हीं **चार** प्रश्नों के उत्तर दीजिए। आप अपने उत्तर को अधिकतम **200** शब्दों में परिसीमित कीजिए। प्रत्येक प्रश्न 5 अंक का है।

2. Examine convergence of series :

$$x + \frac{1}{2} \frac{x^2}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{x^3}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \frac{x^4}{7} + \dots$$

श्रेणी के अभिसरण की जाँच कीजिए :

$$x + \frac{1}{2} \frac{x^2}{3} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{x^3}{5} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \frac{x^4}{7} + \dots$$

3. Prove that radius of curvature at point $(-2a, 2a)$ of curve $x^2y = a(x^2 + y^2)$ is $2a$.

सिद्ध कीजिए कि वक्र $x^2y = a(x^2 + y^2)$ के बिन्दु $(-2a, 2a)$ पर वक्रता त्रिज्या $2a$ है।

4. If :

$$\theta = t^n e^{-\frac{r^2}{4t}}$$

then find the value of n for which :

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \theta}{\partial r} \right) = \frac{\partial \theta}{\partial t}$$

यदि :

$$\theta = t^n e^{-\frac{r^2}{4t}}$$

हो, तो n का वह मान ज्ञात कीजिए जिसके लिए :

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial \theta}{\partial r} \right) = \frac{\partial \theta}{\partial t}$$

5. Trace the curve :

$$x^3 + y^3 = 3axy$$

वक्र का अनुरेखन कीजिए :

$$x^3 + y^3 = 3axy$$

6. Find envelope of family of straight lines $y = mx + am^p$ where m is parameter.

सरल रेखाओं के कुल $y = mx + am^p$ का अन्वालोप ज्ञात कीजिए, जबकि m प्राचल है।

(Long Answer Type Questions)

Note :- Answer any *two* questions. You have to delimit your each answer maximum up to **500** words. Each question carries 10 marks.

खण्ड—स

(दीर्घ उत्तरीय प्रश्न)

निर्देश :- किन्हीं दो प्रश्नों के उत्तर दीजिए। आप अपने उत्तर को अधिकतम **500** शब्दों में परिसीमित कीजिए। प्रत्येक प्रश्न 10 अंक का है।

10. (i) Find Lagrange's and Cauchy remaining term after n terms of expansion of function $\log(1 + x)$.

फलन $\log(1 + x)$ के प्रसार में n पदों के पश्चात् लाग्रान्ज तथा कोशी शेष पद प्राप्त कीजिए।

(ii) Derive the formula for angle between radius vector and tangent.

ध्रुवान्तर रेखा तथा स्पर्श रेखा के मध्य कोण का सूत्र व्युत्पन्न कीजिए।

7. Find the volume of solid of revolution when tractrix $x = a\left(\cos t + \frac{1}{2}\log \tan^2 \frac{t}{2}\right)$, $y = a \sin t$ is revolves about its asymptotes.

ट्रेक्टरी $x = a\left(\cos t + \frac{1}{2}\log \tan^2 \frac{t}{2}\right)$, $y = a \sin t$ द्वारा अपने अनन्त स्पर्शी के परितः परिक्रमण से जनित ठोस का आयतन ज्ञात कीजिए।

8. Evaluate :

$$\int_0^2 \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} \int_0^{x^2+y^2/4} dx dy dz$$

मान ज्ञात कीजिए :

$$\int_0^2 \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} \int_0^{x^2+y^2/4} dx dy dz$$

9. Prove that :

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^3}} = \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^3}{2^{4/3}\sqrt{3\pi}}$$

सिद्ध कीजिए :

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^3}} = \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^3}{2^{4/3}\sqrt{3\pi}}$$

11. (i) Find the height of a cone of maximum volume made in a sphere of radius r .

r त्रिज्या वाले एक गोले में बनाये गये अधिकतम आयतन के शंकु की ऊँचाई ज्ञात कीजिए।

- (ii) Find asymptotes of the following curve :

$$4x^3 - x^2y - 4xy^2 + y^3 + 3x^2 + 2xy - y^2 - 7 = 0$$

निम्न वक्र की अनन्त स्पर्शियाँ ज्ञात कीजिए :

$$4x^3 - x^2y - 4xy^2 + y^3 + 3x^2 + 2xy - y^2 - 7 = 0$$

12. (i) Find the area of the region bounded by the curve $xy^2 = 4a^2(2a - x)$ and its asymptote.

वक्र $xy^2 = 4a^2(2a - x)$ एवं इसकी अनन्त स्पर्शी के द्वारा घिरे भाग का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

- (ii) Find total length of cycloid $x = a(\theta - \sin \theta)$, $y = a(1 - \cos \theta)$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$.

चक्रज $x = a(\theta - \sin \theta)$, $y = a(1 - \cos \theta)$, $0 \leq \theta \leq 2\pi$ की सम्पूर्ण लम्बाई ज्ञात कीजिए।

13. (i) Evaluate the integral by changing order of integration :

$$\int_0^a \int_{\sqrt{ax}}^a \frac{y^2}{\sqrt{y^4 - a^2x^2}} dx dy$$

समाकलन के क्रम परिवर्तन से निम्न द्वि-समाकलन को हल कीजिए :

$$\int_0^a \int_{\sqrt{ax}}^a \frac{y^2}{\sqrt{y^4 - a^2x^2}} dx dy$$

- (ii) Solve :

$$y \sin 2x dx - (1 + y^2 + \cos^2 x) dy = 0$$

हल कीजिए :

$$y \sin 2x dx - (1 + y^2 + \cos^2 x) dy = 0$$