MPH–02

December – Examination 2023

M.Sc. (Previous) Examination

PHYSICS

(Mathematical Physics and Numerical Analysis)

गणितीय भौतिकी एवं सांख्यिकी विश्लेषण

Paper : MPH-02

*Time : **3** Hours*] [*Maximum Marks : **80***

Note :– The question paper is divided into three Sections A, B and C. Write answers as per the given instructions. In case of any discrepancy, the English version will be final for all purposes. **You are allowed to use a non-programmable calculator, however sharing of calculators is not allowed.**

निर्देश :- यह प्रश्न-पत्र 'अ', 'ब' और 'स' तीन खण्डों में विभाजित है। प्रत्येक खण्ड के निर्देशानुसार प्रश्नों के उत्तर दीजिए। किसी भी विसंगति की स्थिति में अंग्रेजी रूप ही अंतिम माना जायेगा। **आपको बिना प्रोग्रामिंग वाले केलकुलेटर के उपयोग की अनुमति है, परन्तु केलकुलेटर के हस्तांतरण की अनुमति नहीं है।**

Section–A **8×2=16**

(Very Short Answer Type Questions)

Note :– Answer all questions. As per the nature of the question delimit your answer in one word, one sentence or maximum up to **30** words. Each question carries 2 marks.

खण्ड–अ

(अति लघु उत्तरीय प्रश्न)

निर्देश :- सभी प्रश्नों के उत्तर दीजिए। आप अपने उत्तर को प्रश्नानुसार एक शब्द, एक वाक्य या अधिकतम **30** शब्दों में परिसीमित कीजिए। प्रत्येक प्रश्न 2 अंक का है।

1. (i) The sum of eigenvalues of a following matrix is equal to 31. Find the value of y :

$$A = \begin{bmatrix} -3 & \beta & \alpha \\ \phi & -30 & \lambda \\ r & \delta & y^2 \end{bmatrix}$$

निम्न मैट्रिक्स का आइगेन मानों का योग 31 है तो y का मान ज्ञात कीजिए :

$$A = \begin{bmatrix} -3 & \beta & \alpha \\ \phi & -30 & \lambda \\ r & \delta & y^2 \end{bmatrix}$$

(ii) Consider the Kronecker delta δ_i^j, find the value of :

$$\left[2 + 3\delta_1^1 - 2\delta_1^3 + 4\delta_3^2 - 5\delta_2^2 + 5\delta_2^3 - 8\delta_3^3\right]^2$$

क्रोनिकर डेल्टा फलन δ_i^j पर विचार कीजिए, निम्न का मान ज्ञात कीजिए :

$$\left[2 + 3\delta_1^1 - 2\delta_1^3 + 4\delta_3^2 - 5\delta_2^2 + 5\delta_2^3 - 8\delta_3^3\right]^2$$

(iii) What is the order of pole at $z = 3$ for given function $4(z - 3)^{-4}$?

फलन $4(z - 3)^{-4}$ के लिए $z = 3$ पर ध्रुव की कोटि क्या होगी ?

(iv) Evaluate the integral $\int_0^1 \frac{2}{1+x} dx$ by Trapezoidal rule upto 3 decimals.

Here $h = 0.25$ and :

x	0	0.25	0.50	0.75	1.00
$\frac{1}{1+x}$	1	0.8	0.667	0.571	0.5

ट्रपेजोइडल के नियम से समाकल $\int_0^1 \frac{2}{1+x} dx$ का मान 3 दशमलव तक ज्ञात कीजिए।

यहाँ $h = 0.25$ व :

x	0	0.25	0.50	0.75	1.00
$\frac{1}{1+x}$	1	0.8	0.667	0.571	0.5

(v) Evaluate the following :

$$3+\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^4}\left[\mathrm{H}_0(x)\right]^4\left[\mathrm{H}_1(x)\right]^3 dx$$

where H(x) is Hermite function.

निम्न को ज्ञात कीजिए :

$$3+\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^4}\left[\mathrm{H}_0(x)\right]^4\left[\mathrm{H}_1(x)\right]^3 dx$$

जहाँ H(x) एक हर्माईट फलन है।

(vi) Evaluate the following function using gamma function :

$$\frac{\left(6\sqrt{\frac{8}{3}}\right)^2}{\left(5\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2}+\frac{1}{9}$$

गामा फलन का उपयोग करते हुए निम्न फलन ज्ञात कीजिए :

$$\frac{\left(6\sqrt{\frac{8}{3}}\right)^2}{\left(5\sqrt{\frac{2}{3}}\right)^2}+\frac{1}{9}$$

(vii) Write the complex number $\left(\sqrt{3}+3\sqrt{3}i\right)$ in polar form.

ध्रुवीय रूप में समिश्र संख्या $\left(\sqrt{3}+3\sqrt{3}i\right)$ को लिखिए।

(viii) Find the unit vectors normal to the surface $z + 2xy = 9$ at the point (1, –1, 1).

सतह $z + 2xy = 9$ के लम्बवत् इकाई सदिशों को बिंदु (1, –1, 1) पर ज्ञात कीजिए।

Section–B **4×8=32**

(Short Answer Type Questions)

Note :– Answer any *four* questions. Each answer should not exceed **200** words. Each question carries 8 marks.

खण्ड—ब

(लघु उत्तरीय प्रश्न)

निर्देश :- किन्हीं **चार** प्रश्नों के उत्तर दीजिए। आप अपने उत्तर को अधिकतम **200** शब्दों में परिसीमित कीजिए। प्रत्येक प्रश्न 8 अंक का है।

2. Evaluate $\int_C \frac{z+4}{z^2+2z+5}dz$, where C is the circle $|(z+1)|=1$.

समाकल $\int_C \frac{z+4}{z^2+2z+5}dz$ को ज्ञात कीजिए, जहाँ C वृत्त $|(z+1)|=1$ है।

3. Using $J_n(x)=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2r}}{r!\lfloor n+r+1}$, find $\frac{d}{dx}\left[x^{-n}J_n(x)\right]$.

फलन $J_n(x)=\sum_{r=0}^{\infty}\frac{(-1)^r\left(\frac{x}{2}\right)^{n+2r}}{r!\lfloor n+r+1}$ का उपयोग करते हुए $\frac{d}{dx}\left[x^{-n}J_n(x)\right]$ ज्ञात कीजिए।

4. Evaluate the following integral $\oint_C\left(\frac{4-3z}{z^2-z}\right)dz$ counterclockwise around any simple closed path such that :

(a) 0 and 1 are inside C

(b) 0 is inside and 1 outside C

एक साधारण बंद पथ इस तरह से लेते हुए वामावर्त में निम्न समाकल $\oint_C\left(\frac{4-3z}{z^2-z}\right)dz$ का मान ज्ञात कीजिए कि :

(अ) 0 तथा 1 वृत्त C के भीतर हैं

(ब) 0 वृत्त C के भीतर है तथा 1 वृत्त C के बाहर है

5. Find the Fourier Cosine transform of :

$$f(x)=\begin{cases}x & \text{for} \quad 0<x<\frac{1}{2}\\ 1-x & \text{for} \quad \frac{1}{2}<x<1\\ 0 & \text{for} \quad x>1\end{cases}$$

फूरिअर कोज्या रूपान्तर ज्ञात कीजिए यदि :

$$f(x)=\begin{cases}x & \text{के लिए} \quad 0<x<\frac{1}{2}\\ 1-x & \text{के लिए} \quad \frac{1}{2}<x<1\\ 0 & \text{के लिए} \quad x>1\end{cases}$$

6. The velocity V (km/min) with respect to time t is shown in the table. Estimate the distance $\int_0^{20} V\,dt$ covered in 20 minutes using Simpson's 3/8 rule :

t	V
0	0
2	10
4	18
6	25
8	29
10	32
12	20
14	11
16	5
18	2
20	0

समय t के साथ वेग V (km/min) को टेबल में दर्शाया गया है। सिम्पसन के 3/8 के नियम से 20 मिनट में तय की गई दूरी $\int_0^{20} V\,dt$ ज्ञात कीजिए :

t	V
0	0
2	10
4	18
6	25
8	29
10	32
12	20
14	11
16	5
18	2
20	0

7. Find the Laplace transform of function $\left(\frac{e^{at}-e^{-at}}{2}\right)\sin at$, here a is constant.

फलन $\left(\frac{e^{at}-e^{-at}}{2}\right)\sin at$ का लाप्लास रूपांतर ज्ञात कीजिए। यहाँ a अचर है।

8. Using Newton-Raphson method, find $(12)^{1/3}$.

न्यूटन-रेफ्सन सूत्र का उपयोग करते हुए $(12)^{1/3}$ का मान ज्ञात कीजिए।

9. Find $\int div\,\vec{F}\,dV$ using divergence theorem for the vector $\vec{F}=x^2\hat{i}+y^2\hat{j}+z^2\hat{k}$ taken over cube $0 \le x \le 1,\ 0 \le y \le 1,\ 0 \le z \le 1$.

यदि सदिश $\vec{F}=x^2\hat{i}+y^2\hat{j}+z^2\hat{k}$ है तो घन $0 \le x \le 1$, $0 \le y \le 1$, $0 \le z \le 1$ के लिए अपसरण प्रमेय का उपयोग करते हुए $\int div\,\vec{F}\,dV$ का मान ज्ञात कीजिए।

Section–C 2×16=32

(Long Answer Type Questions)

Note :– Answer any *two* questions. You have to delimit your each answer maximum up to **500** words. Each question carries 16 marks.

खण्ड—स

(दीर्घ उत्तरीय प्रश्न)

निर्देश :- किन्हीं **दो** प्रश्नों के उत्तर दीजिए। आप अपने उत्तर को अधिकतम **500** शब्दों में परिसीमित कीजिए। प्रत्येक प्रश्न 16 अंक का है।

10. (a) Evaluate the integral $\int_C (z^*)^2\,dz$, where $z^* = x - iy$. Here C is a straight line joining the points $z = 0$ and $z = 1 + 2i$.

समाकल $\int_C (z^*)^2 dz$ को ज्ञात कीजिए जहाँ $z^* = x - iy$। यहाँ बिन्दुओं $z = 0$ तथा $z = 1 + 2i$ को जोड़ने वाली सरल रेखा C है।

(b) $2 + 2x + \frac{1}{2}x^2 = aP_0(x) + bP_1(x) + cP_2(x)$. Here $P_n(x)$ is Legendre polynomial. Find the values of a, b, c.

$2 + 2x + \frac{1}{2}x^2 = aP_0(x) + bP_1(x) + cP_2(x)$। यहाँ $P_n(x)$ लिजेंड्रे बहुपद है। a, b, c के मान ज्ञात कीजिए।

11. (a) By using Rodriguez formula for Hermite polynomial obtain the $H_2(x)$ and then plot the $[H_2(x) + 3]^2$ versus x.

हर्मिट बहुपद के लिए रोड्रिग्ज सूत्र का उपयोग करते हुए $H_2(x)$ प्राप्त कीजिए तथा $[H_2(x) + 3]^2$ को x के साथ चित्रित (plot) कीजिए।

(b) Verify the Cayley Hamilton theorem for matrix $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$.

मेट्रिक्स $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$ के लिए केलि हेमिल्टन प्रमेय सत्यापित कीजिए।

12. (a) Construct an analytic function :

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

where $v(x, y) = 6xy - 5x + 3$.

Express the result as a function of z.

निम्न फलन को एनेलिटिक फलन के रूप में बनाइए :

$$f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$$

जहाँ $v(x, y) = 6xy - 5x + 3$

परिणाम को फलन z के रूप में व्यक्त कीजिए।

(b) Use Newton-Gregory forward difference interpolation formula to compute $y(3.62)$ from the following table :

x	3.60	3.65	3.70	3.75
y	36.598	38.475	40.447	45.521

न्यूटन-ग्रेगोरी अग्रंतर अंतर्वेशन सूत्र का प्रयोग कर निम्न सारणी से $y(3.62)$ की गणना कीजिए :

x	3.60	3.65	3.70	3.75
y	36.598	38.475	40.447	45.521

13. (a) Solve :

$$\left(\frac{y-z}{yz}\right)p+\left(\frac{z-x}{zx}\right)q=\left(\frac{x-y}{xy}\right)$$

Here symbols have usual meaning in partial differential equation.

$\left(\frac{y-z}{yz}\right)p+\left(\frac{z-x}{zx}\right)q=\left(\frac{x-y}{xy}\right)$ हल कीजिए।

यहाँ आंशिक अवकल समीकरण में प्रतीकों के सामान्य प्रचलित अर्थ हैं।

(b) Find the Fourier transform of the function :

$$f(x)=\begin{cases}1 & ; \quad |x|<a \\ 0 & ; \quad |x|>a\end{cases}$$

निम्न फलन का फूरिअर रूपान्तर ज्ञात कीजिए :

$$f(x)=\begin{cases}1 & ; \quad |x|<a \\ 0 & ; \quad |x|>a\end{cases}$$