

**MT-08**

**December – Examination 2022**

**B.A./B.Sc. (Part III) Examination**

**MATHEMATICS**

**(Complex Analysis)**

**Paper : MT-08**

*Time : 3 Hours ]*

*[ Maximum Marks : 47*

**Note** :- The question paper is divided into three Sections 'A', 'B' and 'C'. Write answers as per the given instructions. Use of non-programmable scientific calculator is allowed in this paper.

**निर्देश** :- यह प्रश्न-पत्र 'अ', 'ब' और 'स' तीन खण्डों में विभाजित है। प्रत्येक खण्ड के निर्देशानुसार प्रश्नों के उत्तर दीजिए। इस प्रश्न-पत्र में नॉन-प्रोग्रामेबल साइंटिफिक कैलकुलेटर के उपयोग की अनुमति है।

**Section-A**

**7×1=7**

**(Very Short Answer Type Questions)**

**Note** :- Answer all questions. As per the nature of the question delimit your answer in one word, one sentence or maximum up to **30** words. Each question carries 1 mark.

*MT-08/7*

( 1 )

**TR-298** Turn Over

**खण्ड—अ**

**(अति लघु उत्तरीय प्रश्न)**

**निर्देश** :- सभी प्रश्नों के उत्तर दीजिए। आप अपने उत्तर को प्रश्नानुसार एक शब्द, एक वाक्य या अधिकतम **30** शब्दों में परिसीमित कीजिए। प्रत्येक प्रश्न 1 अंक का है।

1. (i) Define bounded set with example.

परिबद्ध समुच्चय को उदाहरण देते हुए परिभाषित कीजिए।

(ii) Write the polar form of Cauchy-Riemann equation.

कॉशी-रीमान समीकरण का ध्रुवीय रूप लिखिए।

(iii) Find the radius of convergence of power series

$$\sum \frac{(n+1)}{(n+2)(n+3)} z^n .$$

घात श्रेणी  $\sum \frac{(n+1)}{(n+2)(n+3)} z^n$  की अभिसरण त्रिज्या

ज्ञात कीजिए।

*MT-08/7*

( 2 )

**TR-298**

(iv) Prove that :

$$\int_C \frac{dz}{z-a} = 2\pi i$$

where  $C : |z - a| = \rho$ .

सिद्ध कीजिए कि :

$$\int_C \frac{dz}{z-a} = 2\pi i$$

जहाँ  $C : |z - a| = \rho$ ।

(v) State the Cauchy's inequality.

कॉशी असमिका का कथन कीजिए।

(vi) Find the residue of the function

$$f(z) = \frac{z^3 - 2z}{(z-i)^3} \text{ at } z = i.$$

फलन  $f(z) = \frac{z^3 - 2z}{(z-i)^3}$  का  $z = i$  पर अवशेष ज्ञात

कीजिए।

(vii) State the fundamental theorem of algebra.

बीजगणित के मूल प्रमेय का कथन कीजिए।

## Section-B

4×5=20

### (Short Answer Type Questions)

**Note** :- Answer any *four* questions. Each answer should not exceed **200** words. Each question carries 5 marks.

#### खण्ड—ब

#### (लघु उत्तरीय प्रश्न)

**निर्देश** :- किन्हीं **चार** प्रश्नों के उत्तर दीजिए। आप अपने उत्तर को अधिकतम **200** शब्दों में परिसीमित कीजिए। प्रत्येक प्रश्न 5 अंक का है।

2. Prove that function  $u = e^x(x \cos y - y \sin y)$  satisfy Laplace's equation, and find the corresponding analytic function  $f(z)$ .

सिद्ध कीजिए कि फलन  $u = e^x(x \cos y - y \sin y)$  लाप्लास समीकरण को सन्तुष्ट करता है तथा इसके संगत विश्लेषिक फलन  $f(z)$  ज्ञात कीजिए।

3. Find the invariant point of bilinear transformation

$$w = \frac{3z-4}{z-1}, \text{ and transform into normal form.}$$

द्विरैखीय रूपान्तरण  $w = \frac{3z-4}{z-1}$  के स्थिर बिन्दु ज्ञात कीजिए एवं इसे सामान्य रूप में परिवर्तित कीजिए।

4. Evaluate  $\int_0^{1+i} (x-y+ix^2) dz$  along the line  $z = 0$  to  $z = 1 + i$ .

समाकल  $\int_0^{1+i} (x-y+ix^2) dz$  का मान सरल रेखा  $z = 0$  से  $z = 1 + i$  के अनुदिश ज्ञात कीजिए।

5. Evaluate :

$$\int_c \frac{e^{2z}}{(z+1)^4} dz, c : |z| = 3$$

मान ज्ञात कीजिए :

$$\int_c \frac{e^{2z}}{(z+1)^4} dz, c : |z| = 3$$

6. Discuss the singularities for the function  $f(z) = \tan(1/z)$ .

फलन  $f(z) = \tan(1/z)$  की विचित्रताओं की विवेचना कीजिए।

7. State and prove Cauchy's residue theorem.

कॉशी अवशेष प्रमेय का कथन कर सिद्ध कीजिए।

8. Discuss the integration round unit circle for

$$\int_0^{2\pi} f(\cos\theta, \sin\theta) d\theta.$$

$\int_0^{2\pi} f(\cos\theta, \sin\theta) d\theta$  के लिए एकांक वृत्त के चारों ओर समाकलन की विवेचना कीजिए।

9. Define analytic continuation and discuss it.

विश्लेषिक सांतत्य को परिभाषित कीजिए तथा इसकी विवेचना कीजिए।

**Section-C**

**2×10=20**

**(Long Answer Type Questions)**

**Note** :- Answer any *two* questions. You have to delimit your each answer maximum up to **500** words. Each question carries 10 marks.

**खण्ड—स**

**(दीर्घ उत्तरीय प्रश्न)**

**निर्देश** :- किन्हीं दो प्रश्नों के उत्तर दीजिए। आप अपने उत्तर को अधिकतम **500** शब्दों में परिसीमित कीजिए। प्रत्येक प्रश्न 10 अंक का है।

10. Prove that in argand diagram, equation of a straight line can be written as  $z\bar{b} + b\bar{z} = c$ , where  $b$  is a non-zero complex constant and  $c$  is real.

सिद्ध कीजिए कि आर्गेण्ड चित्र में एक सरल रेखा का समीकरण निम्न रूप में लिखा जा सकता है :  $z\bar{b} + b\bar{z} = c$ , जहाँ  $b$  एक अशून्य सम्मिश्र अचर है तथा  $c$  वास्तविक है।

11. State and prove Morera theorem.

मोरेरा प्रमेय को बताइए और सिद्ध कीजिए।

12. Expand  $f(z) = \frac{z^2 - 4}{(z+1)(z+4)}$  for :

(i)  $|z| < 1$

(ii)  $1 < |z| < 4$

(iii)  $|z| > 4$

प्रसार कीजिए :

$$f(z) = \frac{z^2 - 4}{(z+1)(z+4)}$$

(i)  $|z| < 1$

(ii)  $1 < |z| < 4$

(iii)  $|z| > 4$

13. State and prove Rouché's theorem.

रूशे प्रमेय को बताइए और सिद्ध कीजिए।