# MT–07

## December – Examination 2022

## B.A./B.Sc. (Part III) Examination

### MATHEMATICS

### (Algebra)

### Paper : MT-07

*Time : **3** Hours* ] [ *Maximum Marks : **47***

***Note*** :– The question paper is divided into three Sections A, B and C. Use of non-programmable scientific calculator is allowed in this paper.

**निर्देश** :– यह प्रश्न-पत्र 'अ', 'ब' और 'स' तीन खण्डों में विभाजित है। इस प्रश्न-पत्र में नॉन-प्रोग्रामेबल साइंटिफिक कैलकुलेटर के उपयोग की अनुमति है।

**Section–A** **7×1=7**

**(Very Short Answer Type Questions)**

***Note*** :– Answer all questions. As per the nature of the question delimit your answer in one word, one sentence or maximum up to **30** words. Each question carries 1 mark.



**खण्ड—अ**

**(अति लघु उत्तरीय प्रश्न)**

**निर्देश** :- सभी प्रश्नों के उत्तर दीजिए। आप अपने उत्तर को प्रश्नानुसार एक शब्द, एक वाक्य या अधिकतम **30** शब्दों में परिसीमित कीजिए। प्रत्येक प्रश्न 1 अंक का है।

1. (i) Define Subgroup.

   उपसमूह को परिभाषित कीजिए।

   (ii) Define Coset.

   सहकुलक को परिभाषित कीजिए।

   (iii) Define Normal Subgroup.

   प्रसामान्य उपसमूह को परिभाषित कीजिए।

   (iv) Define Integral Domain.

   पूर्णांकीय प्रान्त को परिभाषित कीजिए।

   (v) Define Quotient Ring.

   विभाग वलय को परिभाषित कीजिए।

   (vi) Define Vector Subspace.

   सदिश उपसमष्टि को परिभाषित कीजिए।

   (vii) Define linear dependence of vectors.

   सदिशों की रैखिक आश्रितता को परिभाषित कीजिए।

## Section–B 4×5=20

### (Short Answer Type Questions)

***Note*** :– Answer any *four* questions. Each answer should not exceed **200** words. Each question carries 5 marks.

### खण्ड—ब

### (लघु उत्तरीय प्रश्न)

**निर्देश** :- किन्हीं **चार** प्रश्नों के उत्तर दीजिए। आप अपने उत्तर को अधिकतम **200** शब्दों में परिसीमित कीजिए। प्रत्येक प्रश्न 5 अंक का है।

2. Prove that the set on $n$, $n$th roots of unity is a multiplicative finite Abelian group.

   सिद्ध कीजिए कि इकाई के $n$, $n$वें मूलों का समुच्चय गुणा के लिए परिमित आबेली समूह होता है।

3. For any group G, prove that its centre Z(G) is a subgroup of G, where :

   $$Z(G) = \{x \in G \mid xg = gx \ \forall \ g \in G\}$$

   सिद्ध कीजिए कि किसी समूह G का केन्द्र Z(G), G का उपसमूह होता है, जहाँ :

   $$Z(G) = \{x \in G \mid xg = gx \ \forall \ g \in G\}$$



4. Find the quotient group G/H, when :

   $$G = (Z, +), H = (4Z, +)$$

   विभाग समूह G/H ज्ञात कीजिए, जबकि :

   $$G = (Z, +), H = (4Z, +)$$

5. If $f$ is a homomorphism from a group G to G′ with kernel K, then prove that K is normal subgroup of G.

   यदि $f$ समूह G से G′ पर एक समाकारिता हो तो सिद्ध कीजिए कि $f$ की अष्टि K, G का प्रसामान्य उपसमूह होती है।

6. Prove that the intersection of two ideals of a ring is again an ideal of the ring.

   सिद्ध कीजिए कि किसी वलय को दो गुणजावलियों का सर्वनिष्ठ भी उस वलय की गुणजावली होती है।

7. Show that the ring $(Z_p, +_p, \times_p)$ is an integral domain if and only if $p$ is prime.

   सिद्ध कीजिए कि वलय $(Z_p, +_p, \times_p)$ एक पूर्णांकीय प्रान्त होता है यदि और केवल यदि $p$ अभाज्य है।

8. Prove the the set $W = \{(a, b, o) | a, b \in F\}$ is a subspace of the vector space $V_3(F)$.

सिद्ध कीजिए कि समुच्चय $W = \{(a, b, o) | a, b \in F\}$ सदिश समष्टि $V_3(F)$ की एक उपसमष्टि है।

9. Show that every nonempty subset of a linearly independent set of vectors is also linearly independent.

सिद्ध कीजिए कि सदिशों के रैखिक स्वतन्त्र समुच्चय का प्रत्येक अरिक्त उपसमुच्चय भी रैखिकत: स्वतन्त्र होता है।

## Section–C 2×10=20

## (Long Answer Type Questions)

***Note*** :– Answer any *two* questions. You have to delimit your each answer maximum up to **500** words. Each question carries 10 marks.

## खण्ड—स

## (दीर्घ उत्तरीय प्रश्न)

**निर्देश** :- किन्हीं **दो** प्रश्नों के उत्तर दीजिए। आप अपने उत्तर को अधिकतम **500** शब्दों में परिसीमित कीजिए। प्रत्येक प्रश्न 10 अंक का है।



10. Prove that the set $A_n$ of all even permutations of degree $n$ is a group of order $\frac{1}{2}n!$ for the product of permutations.

सिद्ध कीजिए कि $n$ अंशांक के सभी सम क्रमचयों का समुच्चय $A_n$ क्रमचय गुणन संकिया के लिए $\frac{1}{2}n!$ कोटि का समूह होता है।

11. Show that a ring R is without zero divisors if and only if the cancellation law holds in R.

सिद्ध कीजिए कि कोई वलय R शून्य भाजक रहित है यदि और केवल यदि R में निरसन नियम सत्य है।

12. If $W_1$ and $W_2$ are *two* subspaces of a finite dimensional vector space V(F), then show :

$$\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2)$$

यदि $W_1$ और $W_2$ एक परिमित विमीय सदिश समष्टि V(F) की दो उपसमष्टियाँ हों तो सिद्ध कीजिए :

$$\dim(W_1 + W_2) = \dim W_1 + \dim W_2 - \dim(W_1 \cap W_2)$$

13. Show that every linearly independent subset of a finite dimensional vector space V(F) is either a basis of V or can be extended to form a basis of V.

सिद्ध कीजिए कि किसी परिमित विमीय सदिश समष्टि V(F) का प्रत्येक रैखिकतः स्वतन्त्र उपसमुच्चय या तो V का आधार होता है या उसे V का आधार निर्मित करने के लिए विस्तृत किया जा सकता है।