

MT-02

December – Examination 2022

B.A./B.Sc. (Part-I) Examination

MATHEMATICS

(Calculus and Differential Equations)

Paper : MT-02

Time : 3 Hours]

[Maximum Marks : 47

Note :- The question paper is divided into three Sections A, B and C. Use of non-programmable scientific calculator is allowed in this paper.

निर्देश :- यह प्रश्न-पत्र 'अ', 'ब' और 'स' तीन खण्डों में विभाजित है। इस प्रश्न-पत्र में नॉन-प्रोग्रामेबल साइंटिफिक कैलकुलेटर के उपयोग की अनुमति है।

Section-A

7×1=7

(Very Short Answer Type Questions)

Note :- Answer all questions. As per the nature of the question delimit your answer in one word, one sentence or maximum up to **30** words. Each question carries 1 mark.

MT-02/8

(1)

TR-292 Turn Over

खण्ड—अ

(अति लघु उत्तरीय प्रश्न)

निर्देश :- सभी प्रश्नों के उत्तर दीजिए। आप अपने उत्तर को प्रश्नानुसार एक शब्द, एक वाक्य या अधिकतम **30** शब्दों में परिसीमित कीजिए। प्रत्येक प्रश्न 1 अंक का है।

1. (i) Write Hyper-harmonic series.
हाइपर-हारमोनिक श्रेणी लिखिए।
- (ii) State Lagrange's mean value theorem.
लैग्रान्जे का मध्यमान प्रमेय का कथन कीजिए।
- (iii) Write formula for angle between radius vector and tangent.
ध्रुवान्तर रेखा तथा स्पर्श रेखा के मध्य कोण का सूत्र लिखिए।
- (iv) Define circular asymptotes.
वृत्तीय अनन्तस्पर्शी को परिभाषित कीजिए।
- (v) Define Envelope.
अन्वालोप को परिभाषित कीजिए।
- (vi) Define Naige equation of a curve.
वक्र के नैज समीकरण को परिभाषित कीजिए।

MT-02/8

(2)

TR-292

(vii) Solve :

$$e^y \frac{dy}{dx} = e^x + x^2$$

हल कीजिए :

$$e^y \frac{dy}{dx} = e^x + x^2$$

Section-B **4×5=20**

(Short Answer Type Questions)

Note :- Answer any *four* questions. Each answer should not exceed **200** words. Each question carries 5 marks.

खण्ड—ब

(लघु उत्तरीय प्रश्न)

निर्देश :- किन्हीं **चार** प्रश्नों के उत्तर दीजिए। आप अपने उत्तर को अधिकतम **200** शब्दों में परिसीमित कीजिए। प्रत्येक प्रश्न 5 अंक का है।

2. Test convergence of series :

$$x + \frac{2^2 x^2}{|2|} + \frac{3^3 x^3}{|3|} + \frac{4^4 x^4}{|4|} + \dots$$

श्रेणी $x + \frac{2^2 x^2}{|2|} + \frac{3^3 x^3}{|3|} + \frac{4^4 x^4}{|4|} + \dots$ के अभिसरण का परीक्षण कीजिए।

3. Find expansion of $(1 + x)^m$, $m \in \mathbb{R}$.

$(1 + x)^m$, $m \in \mathbb{R}$ का प्रसार ज्ञात कीजिए।

4. If $u = \log(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz)$, then prove that :

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 u = -\frac{9}{(x + y + z)^2}$$

यदि $u = \log(x^3 + y^3 + z^3 - 3xyz)$ तो सिद्ध कीजिए कि :

$$\left(\frac{\partial}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial y} + \frac{\partial}{\partial z} \right)^2 u = -\frac{9}{(x + y + z)^2}$$

5. Show that function $f(x) = (3 - x)e^{2x} - 4xe^x - x$ is neither maximum nor minimum at $x = 0$.

दर्शाइए कि $f(x) = (3 - x)e^{2x} - 4xe^x - x$ के लिए $x = 0$

पर न तो उच्चिष्ठ है न निम्निष्ठ।

6. Prove that asymptotes of curve $x^3 - 2y^3 + xy(2x - y) + y(x - y) + 1 = 0$ cut again the curve at 3 points which lies on straight line $x + y + 1 = 0$.

सिद्ध कीजिए कि वक्र $x^3 - 2y^3 + xy(2x - y) + y(x - y) + 1 = 0$ के अनन्तस्पर्शी वक्र को तीन बार काटते हैं तथा रेखा $x + y + 1 = 0$ पर स्थित है।

7. Find area of loop of curve $x(x^2 + y^2) = a(x^2 - y^2)$.

वक्र $x(x^2 + y^2) = a(x^2 - y^2)$ के लूप का क्षेत्रफल ज्ञात कीजिए।

8. Find volume of solid generated by revolving tractrix $x = a\left(\cos t + \frac{1}{2}\log \tan^2 \frac{1}{2}\right)$, $y = a \sin t$ about its asymptotes.

ट्रैक्ट्रिक्स $x = a\left(\cos t + \frac{1}{2}\log \tan^2 \frac{1}{2}\right)$, $y = a \sin t$ द्वारा

अपने अनन्तस्पर्शी के परितः परिक्रमण से जनित ठोस का आयतन ज्ञात कीजिए।

9. Evaluate :

$$\int_0^2 \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} \int_0^{\frac{x^2+y^2}{4}} dx dy dz$$

मान ज्ञात कीजिए :

$$\int_0^2 \int_0^{\sqrt{2x-x^2}} \int_0^{\frac{x^2+y^2}{4}} dx dy dz$$

Section-C

2×10=20

(Long Answer Type Questions)

Note :- Answer any *two* questions. You have to delimit your each answer maximum up to **500** words. Each question carries 10 marks.

खण्ड—स

(दीर्घ उत्तरीय प्रश्न)

निर्देश :- किन्हीं दो प्रश्नों के उत्तर दीजिए। आप अपने उत्तर को अधिकतम **500** शब्दों में परिसीमित कीजिए। प्रत्येक प्रश्न 10 अंक का है।

10. (a) Find $\frac{ds}{d\theta}$ for curve $\frac{2a}{r} = 1 + \cos\theta$.

वक्र $\frac{2a}{r} = 1 + \cos\theta$ के लिए $\frac{ds}{d\theta}$ ज्ञात कीजिए।

(b) Prove that radius of curvature of curve $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ at point $(a \cos^3 \theta, a \sin^3 \theta)$ is $\frac{3a}{2} \sin 2\theta$.

सिद्ध कीजिए कि वक्र $x^{2/3} + y^{2/3} = a^{2/3}$ के बिन्दु $(a \cos^3 \theta, a \sin^3 \theta)$ पर वक्रता त्रिज्या $\frac{3a}{2} \sin 2\theta$ होगी।

11. Transform Cartesian equation $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ into polar form.

कार्तीय समीकरण $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ का ध्रुवीय रूपान्तरण कीजिए।

12. (a) Trace the curve $x^3 + y^3 = 3axy$.

वक्र $x^3 + y^3 = 3axy$ का अनुरेखण कीजिए।

(b) Trace the curve $r^2 = a^2 \cos 2\theta$.

वक्र $r^2 = a^2 \cos 2\theta$ का अनुरेखण कीजिए।

13. (a) Change the order of the following integral :

$$\int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} f(x, y) dx dy$$

निम्नलिखित समाकलन का क्रम परिवर्तन कीजिए :

$$\int_0^a \int_0^{\sqrt{a^2-x^2}} f(x, y) dx dy$$

(b) Prove that :

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^3}} = \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^3}{2^{4/3} \sqrt{3\pi}}$$

सिद्ध कीजिए :

$$\int_0^1 \frac{dx}{\sqrt{1-x^3}} = \frac{\left(\frac{1}{3}\right)^3}{2^{4/3} \sqrt{3\pi}}$$