MPH–03

December – Examination 2022

M.Sc. (Previous) Examination

PHYSICS

(Quantum Mechanics)

क्वाण्टम यांत्रिकी

Paper : MPH-03

*Time : **3** Hours*] [*Maximum Marks : **80***

Note :– The question paper is divided into three Sections A, B and C. Write answers as per the given instructions. In case of any discrepancy, the English version will be final for all purposes. Calculators are not allowed.

निर्देश :- यह प्रश्न-पत्र 'अ', 'ब' और 'स' तीन खण्डों में विभाजित है। प्रत्येक खण्ड के निर्देशानुसार प्रश्नों के उत्तर दीजिए। किसी भी विसंगति की स्थिति में अंग्रेजी रूप ही अंतिम माना जायेगा। कैलकुलेटर के उपयोग की अनुमति नहीं है।

Section–A **8×2=16**

(Very Short Answer Type Questions)

Note :– Answer all questions. As per the nature of the question delimit your answer in one word, one sentence or maximum up to **30** words. Each question carries 2 marks.

खण्ड—अ

(अति लघु उत्तरीय प्रश्न)

निर्देश :- सभी प्रश्नों के उत्तर दीजिए। आप अपने उत्तर को प्रश्नानुसार एक शब्द, एक वाक्य या अधिकतम **30** शब्दों में परिसीमित कीजिए। प्रत्येक प्रश्न 2 अंक का है।

1. (i) Find the value of the following expression :

$$\int_{-2}^{3} \cos(3x)\delta\left(x-\frac{\pi}{3}\right)dx$$

निम्न व्यंजक का मान ज्ञात कीजिए :

$$\int_{-2}^{3} \cos(3x)\delta\left(x-\frac{\pi}{3}\right)dx$$

(ii) Angular momentum and momentum operators are L_y and P_z respectively. What is the simplified expression of commutator $[P_z, L_y]$?

कोणीय संवेग एवं संवेग संकारक क्रमशः L_y तथा P_z हैं। विनिमयक $[P_z, L_y]$ का सरलीकृत व्यंजक क्या होगा ?

(iii) For the trace :

$$Tr(ABC) = Tr(CXY)$$

what are X and Y in terms of A, B, C ?

ट्रेस के लिए :

$$Tr(ABC) = Tr(CXY)$$

X तथा Y का मान A, B, C के पदों में लिखिए।

(iv) An electron of mass m moves inside the infinitely deep one dimensional potential box having width from $x = -\frac{a}{2}$ to $x = \frac{3a}{2}$ then write the expression for ground state energy of the electron.

अनन्त विभव के एकविमीय विभव बॉक्स में एक m द्रव्यमान का इलेक्ट्रॉन है। बॉक्स की चौड़ाई $x = -\frac{a}{2}$ से $x = \frac{3a}{2}$ है, तब इलेक्ट्रॉन की मूल अवस्था के लिए ऊर्जा लिखिए।

(v) A wavefunction is given by :

$$\psi(x, y, z, t) = Ae^{i(5\pi t - 4x - 3y + 5z)}$$

Find the unit vector representing the propagation of this matter wave.

एक तरंगफलन निम्न है :

$$\psi(x, y, z, t) = Ae^{i(5\pi t - 4x - 3y + 5z)}$$

इस तरंगफलन की संचरण की दिशा में इकाई सदिश ज्ञात कीजिए।

(vi) If a and a^+ are lowering and raising operators for one dimensional simple harmonic oscillator, let $|n\rangle$ be energy eigen state of the simple harmonic oscillator. Find the $a^+a^+aa\ |n\rangle$.

एक विमीय सरल आवृत्ति दोलित्र के लिए a तथा a^+ क्रमशः निम्नक तथा उच्चक संकारक हैं। यह मानिए कि सरल आवृत्ति दोलित्र के ऊर्जा आइगेन अवस्था $|n\rangle$ है तो ज्ञात कीजिए :

$$a^+a^+aa\ |n\rangle$$

(vii) A one dimensional harmonic oscillator is in the superposition of number of states $|n\rangle$ given by :

$$|\psi\rangle = \frac{1}{2}|2\rangle + \frac{\sqrt{3}}{2}|3\rangle$$

Average energy of the oscillator in the given state is $\alpha h\nu$. What is the value of α ? Here ground state enregy is $\frac{h\nu}{2}$.

एक विमीय सरल आवृत्ति दोलित्र कई सारी अवस्थाओं $|n\rangle$ के अध्यारोपण से बनी अवस्था निम्न है :

$$|\psi\rangle = \frac{1}{2}|2\rangle + \frac{\sqrt{3}}{2}|3\rangle$$

दी गई अवस्था के लिए एक दोलित्र की औसत ऊर्जा $\alpha h\nu$ है। यहाँ α का मान क्या होगा ? यहाँ मूल अवस्था ऊर्जा $\frac{h\nu}{2}$ है।

(viii) Pauli matrices are given by σ_x, σ_y, σ_x. Write the final form of $3\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_x$ in the terms of Pauli matrix.

σ_x, σ_y, σ_x पाउली मैट्रिक्स है। $3\sigma_x\sigma_y + \sigma_y\sigma_x$ के अंतिम रूप को पाउली मैट्रिक्स के रूप में लिखिए।

Section–B 4×8=32

(Short Answer Type Questions)

Note :– Answer any *four* questions. Each answer should not exceed **200** words. Each question carries 8 marks.

खण्ड—ब

(लघु उत्तरीय प्रश्न)

निर्देश :- किन्हीं **चार** प्रश्नों के उत्तर दीजिए। आप अपने उत्तर को अधिकतम **200** शब्दों में परिसीमित कीजिए। प्रत्येक प्रश्न 8 अंक का है।

2. Prove that if A is Hermitian operator, then e^{iA} is unitary operator.

यह दर्शाइए कि यदि A हर्मिशियन संकारक है, तो e^{iA} एक यूनिटरी संकारक है।

3. Explain the spin half-angular momentum of an electron.

इलेक्ट्रॉन के अर्ध-चक्रण कोणीय संवेग को समझाइए।

4. Deduce the time independent Schrödinger equation from time dependent Schrödinger equation.

काल आश्रित श्रोडिंगर समीकरण की सहायता से काल अनाश्रित श्रोडिंगर समीकरण का निगमन कीजिए।

5. Briefly explain the Thomas-Fermi statistical model and Hartree's self-consistent field method under central field approximation.

केन्द्रीय क्षेत्र सन्निकटता के अन्तर्गत संक्षेप में थॉमस-फर्मी सांख्यिकीय मॉडल और हार्ट्री स्वतः क्षेत्र मॉडल को समझाइए।

6. By Schrödinger wave equation obtain the equation of continuity :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \vec{J} = 0$$

where ρ is the probability density and $\vec{J}$ is the probability current density.

श्रोडिंगर समीकरण द्वारा सांतत्य समीकरण :

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \text{div } \vec{J} = 0$$

को प्राप्त कीजिए जहाँ ρ प्रायकिता घनत्व है तथा $\vec{J}$ प्रायिकता धारा घनत्व है।

7. Prove that, if the wavefunction in coordinate space is normalized, the momentum wavefunction is also normalized.

सिद्ध कीजिए कि यदि तरंगफलन स्पेस निर्देशांक प्रसामान्यीकृत है, तो संवेग तरंगफलन प्रसामान्यीकृत है।

8. What does mean by Stark effect ? Briefly explain the first order Stark effect in ground state of hydrogen atom.

स्टार्क प्रभाव से क्या तात्पर्य है ? हाइड्रोजन परमाणु की मूल अवस्था के लिए प्रथम कोटि स्टार्क प्रभाव को संक्षेप में समझाइए।

9. Prove that the fundamental commutation relation :

$$[x, p_x] = \frac{ih}{2\pi}$$

remains unchanged under unitary transformation.

यह दर्शाइए कि मूलभूत क्रमविनिमय सम्बन्ध :

$$[x, p_x] = \frac{ih}{2\pi}$$

यूनिटरी रूपांतरण में अपरिवर्तित रहता है।

Section–C **2×16=32**

(Long Answer Type Questions)

Note :– Answer any *two* questions. You have to delimit your each answer maximum up to **500** words. Each question carries 16 marks.

खण्ड—स

(दीर्घ उत्तरीय प्रश्न)

निर्देश :– किन्हीं **दो** प्रश्नों के उत्तर दीजिए। आप अपने उत्तर को अधिकतम **500** शब्दों में परिसीमित कीजिए। प्रत्येक प्रश्न 16 अंक का है।

10. (a) Using the matrices A and B, for the trace show that :

$$Tr(AB) = Tr(BA)$$

$$A = \begin{pmatrix} 8-2i & 4i & 0 \\ 1 & 0 & 1-i \\ -8 & i & 6i \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} -i & 2 & 1-i \\ 6 & 1+i & 3i \\ 1 & 5+7i & 0 \end{pmatrix}$$

मैट्रिक्स A तथा B का प्रयोग करते हुए ट्रेस के लिए सिद्ध कीजिए कि :

$$Tr(AB) = Tr(BA)$$

$$A = \begin{pmatrix} 8-2i & 4i & 0 \\ 1 & 0 & 1-i \\ -8 & i & 6i \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} -i & 2 & 1-i \\ 6 & 1+i & 3i \\ 1 & 5+7i & 0 \end{pmatrix}$$

(b) Show that commutation relation :

$$[L_x, L_y] = \frac{ih}{2\pi} L_z$$

निम्न क्रमविनिमेय सम्बन्ध को प्रदर्शित कीजिए :

$$[L_x, L_y] = \frac{ih}{2\pi} L_z$$ 8+8

11. (a) Consider the state :

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|\phi_1\rangle + \frac{1}{\sqrt{5}}|\phi_2\rangle + \frac{1}{\sqrt{10}}|\phi_3\rangle$$

which is given by in terms of three orthonormal eigen states $|\phi_1\rangle, |\phi_2\rangle$ and $|\phi_3\rangle$ and of an operator $\hat{B}$ such that $\hat{B}|\phi_n\rangle = n^2|\phi_n\rangle$. Find the expectation value of $\hat{B}$ for state $|\psi\rangle$.

अवस्था

$$|\psi\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}|\phi_1\rangle + \frac{1}{\sqrt{5}}|\phi_2\rangle + \frac{1}{\sqrt{10}}|\phi_3\rangle$$

संकारक $\hat{B}$ के तीन प्रसामान्य लम्बकृत आइगेन अवस्था $|\phi_1\rangle, |\phi_2\rangle$ तथा $|\phi_3\rangle$ को मान लीजिए इस प्रकार कि $\hat{B}|\phi_n\rangle = n^2|\phi_n\rangle$ अवस्था $|\psi\rangle$ के लिए $\hat{B}$ का प्रत्याशा मान ज्ञात कीजिए।

(b) With the help of W.K.B. method, calculate the transmission coefficient for the given potential barrier :

$$V(x) = \begin{cases} V_0 - ax & ; \quad x > 0 \\ 0 & ; \quad x < 0 \end{cases}$$

निम्न विभव अवरोध के लिए W.K.B. विधि की सहायता से पारगमन गुणांक ज्ञात कीजिए :

$$V(x) = \begin{cases} V_0 - ax & ; \quad x > 0 \\ 0 & ; \quad x < 0 \end{cases}$$ 8+8

12. (a) Consider the following kets :

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} -5i \\ 2 \\ i \end{pmatrix} \text{ and } |\phi\rangle = \begin{pmatrix} 3 \\ 8i \\ -9i \end{pmatrix}$$

Is $|\psi\rangle$ normalized ? If not, then normalize it. Are $|\psi\rangle$ and $|\phi\rangle$ orthogonal ? Check it.

निम्न दो केट मान लीजिए :

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} -5i \\ 2 \\ i \end{pmatrix} \text{ तथा } |\phi\rangle = \begin{pmatrix} 3 \\ 8i \\ -9i \end{pmatrix}$$

क्या $|\psi\rangle$ प्रसामान्यीकृत है ? यदि $|\psi\rangle$ प्रसामान्यकृत नहीं है तो प्रसामान्यीकृत कीजिए। क्या $|\psi\rangle$ तथा $|\phi\rangle$ लाम्बिक है ? इसकी जाँच कीजिए।

(b) Represent graphically the wave functions for states n = 0, 1, 2, 3 of simple harmonic oscillator.

एक सरल आवृत्ति दोलित्र की अवस्था n = 0, 1, 2, 3 के लिए तरंगफलनों को ग्राफीय विधि से चित्रित कीजिए। 8+8

13. (a) Using Bohr–Sommerfeld Quantization rule, obtain the zero point energy of the one dimensional harmonic oscillator.

बोर–समरफेल्ड क्वाण्टीकरण नियम का उपयोग करते हुए एक विमीय आवृत्ति दोलित्र के लिए शून्य बिन्दु ऊर्जा प्राप्त कीजिए।

(b) Prove that :

$$[J_z, J_+] = \frac{h}{2\pi} J_+$$

Symbols have usual meaning in angular momentum.

सिद्ध कीजिए :

$$[J_z, J_+] = \frac{h}{2\pi} J_+$$

कोणीय संवेग के चिह्नों के सामान्य प्रचलित अर्थ हैं। 8+8