MPH–02

December – Examination 2022

M.Sc. (Previous) Examination

PHYSICS

(Mathematical Physics and Numerical Analysis)

गणितीय भौतिकी एवं सांख्यिकी विश्लेषण

Paper : MPH-02

*Time : **3** Hours*] [*Maximum Marks : **80***

Note :– The question paper is divided into three Sections A, B and C. Write answers as per the given instructions. In case of any discrepancy, the English version will be final for all purposes. **You are allowed to use a non-programmable calculator, however sharing of calculators is not allowed.**

निर्देश :- यह प्रश्न-पत्र 'अ', 'ब' और 'स' तीन खण्डों में विभाजित है। प्रत्येक खण्ड के निर्देशानुसार प्रश्नों के उत्तर दीजिए। किसी भी विसंगति की स्थिति में अंग्रेजी रूप ही अंतिम माना जायेगा। **आपको बिना प्रोग्रामिंग वाले केलकुलेटर के उपयोग की अनुमति है, परन्तु केलकुलेटर के हस्तांतरण की अनुमति नहीं है।**

Section–A 8×2=16

(Very Short Answer Type Questions)

Note :– Answer all questions. As per the nature of the question delimit your answer in one word, one sentence or maximum up to **30** words. Each question carries 2 marks.

खण्ड—अ

(अति लघु उत्तरीय प्रश्न)

निर्देश :- सभी प्रश्नों के उत्तर दीजिए। आप अपने उत्तर को प्रश्नानुसार एक शब्द, एक वाक्य या अधिकतम **30** शब्दों में परिसीमित कीजिए। प्रत्येक प्रश्न 2 अंक का है।

1. (i) Find the directional derivate of ψ in direction of vector $\vec{b}$.

Here $\psi = 2x + 7z$ and $\vec{b} = 3\hat{i} + 4\hat{j}$.

सदिश $\vec{b}$ के अनुदिश ψ का दिक् डेरिवेटिव ज्ञात कीजिए। यहाँ $\psi = 2x + 7z$ तथा $\vec{b} = 3\hat{i} + 4\hat{j}$ है।

(ii) What is the distance between two points (given in cylindrical coordinate system) $P_1(1, 0, 0)$ and $P_2(1, \pi, 0)$?

दो बिन्दुओं (बेलनाकार निर्देशांकों में दिए गए हैं) $P_1(1, 0, 0)$ तथा $P_2(1, \pi, 0)$ के मध्य दूरी क्या होगी ?

(iii) Consider the Kronecker delta δ_i^j. Find the value of :

$$\delta_1^1 + \delta_1^2 + \delta_3^1 + \delta_3^2 + \delta_3^3$$

क्रोनिकर डेल्टा फलन δ_i^j पर विचार कीजिए। निम्न का मान ज्ञात कीजिए :

$$\delta_1^1 + \delta_1^2 + \delta_3^1 + \delta_3^2 + \delta_3^3$$

(iv) The sum of eigenvalues of a following matrix is equal to 8. Find the value of x :

$$A = \begin{bmatrix} -1 & a & b \\ c & x & f \\ d & e & 5 \end{bmatrix}$$

निम्न मेट्रिक्स का आइगेनमानों का योग 8 है तो x का मान ज्ञात कीजिए :

$$A = \begin{bmatrix} -1 & a & b \\ c & x & f \\ d & e & 5 \end{bmatrix}$$

(v) For Bessel function $J_{(-2)}(x) = bJ_{(2)}(x)$. What is the value of b ?

बेसल फलन के लिए $J_{(-2)}(x) = bJ_{(2)}(x)$ है। b का मान क्या होगा ?

(vi) Writing proper steps, check that whether function $F(x)$ even function or odd function. Here $P_n(x)$ is Legendre polynomial and $F(x) = P_0(x)\, P_1(x)\, P_2(x)$.

उचित पदों को लिखते हुए यह जाँच कीजिए कि फलन $F(x)$ सम फलन है अथवा विषम फलन है। यहाँ $P_n(x)$ लेगेंद्रे बहुपद है व $F(x) = P_0(x)\, P_1(x)\, P_2(x)$.

(vii) What is the order of pole at $z = 2$ for given function :

$$f(z) = 2(z-2)^{-3}$$

निम्न दिए गए फलन के लिए $z = 2$ पर ध्रुव की कोटि क्या होगी ?

$$f(z) = 2(z-2)^{-3}$$

(viii) Find the Laplace transform of function $2te^{3t}$.

फलन $2te^{3t}$ का लाप्लास रूपांतर ज्ञात कीजिए।

Section–B 4×8=32

(Short Answer Type Questions)

Note :– Answer any *four* questions. Each answer should not exceed **200** words. Each question carries 8 marks.

खण्ड—ब

(लघु उत्तरीय प्रश्न)

निर्देश :- किन्हीं **चार** प्रश्नों के उत्तर दीजिए। आप अपने उत्तर को अधिकतम **200** शब्दों में परिसीमित कीजिए। प्रत्येक प्रश्न 8 अंक का है।

2. Using beta and gamma function find the value of :

$$\int_0^{\pi/2} \sin^4\theta\, \cos^5\theta d\theta$$

बीटा व गामा फलन का उपयोग करते हुए $\int_0^{\pi/2} \sin^4\theta\, \cos^5\theta d\theta$ का मान ज्ञात कीजिए।

3. Find the eigenvalues and eigenvectors of matrix :

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 4 \\ -1.6 & 1.2 \end{bmatrix}$$

मेट्रिक्स के आइगेनमान तथा आइगेन सदिश ज्ञात कीजिए :

$$A = \begin{bmatrix} -4 & 4 \\ -1.6 & 1.2 \end{bmatrix}$$

4. Find the Fourier transform of the function :

$$A(x) = e^{-\pi x^2}$$

निम्न का फुरिअर रूपान्तर ज्ञात कीजिए :

$$A(x) = e^{-\pi x^2}$$

5. Evaluate the integral $\int_C (z^*)^2\, dz$, where $z^* = x - iy$. Here C is a straight line joining the points $z = 0$ and $z = 1 + 2i$.

निम्न समाकल $\int_C (z^*)^2\, dz$ का मूल्यांकन कीजिए, जहाँ $z^* = x - iy$। यहाँ बिन्दुओं $z = 0$ तथा $z = 1 + 2i$ को जोड़ने वाली सरल रेखा C है।

6. Using Cauchy's integral formula, evaluate the integral $\oint_C \frac{e^z}{(z^2+1)} dz$ for the both cases of centers, if C is a circle of unit radius with center at :
(a) $z = i$
(b) $z = -i$

कॉची समाकल सूत्र का उपयोग करते हुए समाकल $\oint_C \frac{e^z}{(z^2+1)} dz$ केन्द्रों की दोनों स्थितियों पर ज्ञात कीजिए जहाँ C इकाई त्रिज्या का वृत्त है यदि जिसका केंद्र :
(अ) $z = i$
(ब) $z = -i$ हो

7. $1 + x - x^2 = aP_0(x) + bP_1(x) + cP_2(x)$. Here $P_n(x)$ is Legendre polynomial. Find the values of a, b, c.
$1 + x - x^2 = aP_0(x) + bP_1(x) + cP_2(x)$. यहाँ $P_n(x)$ लेजेंद्रे बहुपद है। a, b, c का मान ज्ञात कीजिए।

8. Check that whether following function is rotational or not :

$$\vec{A} = (y\sin z - \sin x)\hat{i} + (x\sin z + 2yz)\hat{j} + (xy\cos z + y^2)\hat{k}$$

जाँच कीजिए कि निम्न फलन घूर्णी है अथवा नहीं :

$$\vec{A} = (y\sin z - \sin x)\hat{i} + (x\sin z + 2yz)\hat{j} + (xy\cos z + y^2)\hat{k}$$

9. Check that whether complex function $f = (x + iy)^3$ is analytic or not.
जाँच कीजिए कि सम्मिश्र फलन $f = (x + iy)^3$ वैश्लेषिक है अथवा नहीं।

Section–C 2×16=32

(Long Answer Type Questions)

Note :– Answer any *two* questions. You have to delimit your each answer maximum up to **500** words. Each question carries 16 marks.

खण्ड—स

(दीर्घ उत्तरीय प्रश्न)

निर्देश :- किन्हीं **दो** प्रश्नों के उत्तर दीजिए। आप अपने उत्तर को अधिकतम **500** शब्दों में परिसीमित कीजिए। प्रत्येक प्रश्न 16 अंक का है।

10. (a) Find the Laplace transform of the following function :

$$f(t) = 2e^{-2t} \cos^2 t$$

(b) By using Rodrigues formula for Hermite polynomial obtain the $H_2(x)$, and then plot the $[H_2(x) + 1]^2$ versus x.

(अ) निम्न फलन का लाप्लास रूपान्तर ज्ञात कीजिए :

$$f(t) = 2e^{-2t} \cos^2 t$$

(ब) हर्मिट बहुपद के लिए रोड्रिग सूत्र का उपयोग करते हुए $H_2(x)$ प्राप्त कीजिए तथा $[H_2(x) + 1]^2$ को x के साथ चित्रित कीजिए। 8+8

11. (a) Evaluate $\int_0^1 f\,dx$ by dividing the range into four equal parts using Trapezoidal rule. Here :

x	0	0.25	0.5	0.75	1.0
f	1	0.9	0.6	0.4	0.2

(b) Verify the Cayley Hamilton theorem for matrix $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$.

(अ) समाकल $\int_0^1 f\,dx$ का मान परास को चार बराबर भागों में बाँटते हुए ट्रेपेजोइडल नियम से ज्ञात कीजिए। यहाँ :

x	0	0.25	0.5	0.75	1.0
f	1	0.9	0.6	0.4	0.2

(ब) मेट्रिक्स $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$ के लिए केली हेमिल्टन प्रमेय सत्यापित कीजिए। 8+8

12. Expand periodic function $f(x) = x^2$; $0 < x < 2\pi$ in a Fourier series if the period is 2π and $f(x) = f(x + 2\pi)$. Also plot $f(x)$ the with x in the range $0 < x < 2\pi$.

आवृत्ति फलन $f(x) = x^2$; $0 < x < 2\pi$ को फुरिअर श्रेणी में विस्तारित कीजिए यदि आवर्त 2π तथा $f(x) = f(x + 2\pi)$ है। परास $0 < x < 2\pi$ में $f(x)$ को x के साथ चित्रित कीजिए। 16

13. (a) Find the poles of :

$$f(z) = \frac{1}{(1-2i)z^2 + 6iz - 1 - 2i}$$

(b) Find a real root of the equation $x^3 - 2 = 0$ using Newton-Raphson method. Here start with initial value $x = 1.5$.

(अ) फलन $f(z) = \frac{1}{(1-2i)z^2 + 6iz - 1 - 2i}$ के ध्रुव ज्ञात कीजिए।

(ब) समीकरण $x^3 - 2 = 0$ का वास्तविक मूल न्यूटन-रेफ्सन विधि द्वारा ज्ञात कीजिए। यहाँ $x = 1.5$ प्रारम्भिक मान के साथ शुरू कीजिए। 8+8