MT–08

December – Examination 2021

B.A./B.Sc. (Part III) Examination

MATHEMATICS

(Second Paper)

(Complex Analysis)

Paper : MT-08

Time : 1½ Hours] [*Maximum Marks : 47*

Note :– The question paper is divided into two Sections A and B. Section–A contains 8 Very Short Answer Type Questions. Examinees have to attempt any *four* questions. Each question is of 1¾ marks and maximum word limit may be **30** words. Section–B contains 8 Short Answer Type Questions. Examinees will have to answer any *four* questions. Each question is of 10 marks. Examinees have to delimit each answer in maximum **200** words. Use of non-programmable scientific calculator is allowed in this paper.

निर्देश :- प्रश्न-पत्र दो खण्डों अ और ब में विभाजित है। खण्ड-अ में 8 अति लघूत्तरात्मक प्रश्न हैं, परीक्षार्थियों को किन्हीं **चार** प्रश्नों को हल करना है। प्रत्येक प्रश्न के 1¾ अंक हैं और अधिकतम शब्द-सीमा **30** शब्द है। खण्ड-ब में 8 लघु उत्तरीय प्रश्न हैं, परीक्षार्थियों को किन्हीं **चार** प्रश्नों के उत्तर देना है। प्रत्येक प्रश्न 10 अंकों का है। परीक्षार्थियों को अधिकतम **200** शब्दों में प्रत्येक जवाब परिसीमित करने हैं। इस प्रश्न-पत्र में नॉन-प्रोग्रामेबल साइंटीफिक कैलकुलेटर के उपयोग की अनुमति है।

Section–A **1¾×4=7**

(Very Short Answer Type Questions)

खण्ड—अ

(अति लघु उत्तरीय प्रश्न)

1. (i) If sequence $\{z_n\}$ converges to a, then prove that subsequence $\{z_{n_k}\}$ of sequence $\{z_n\}$ also converges to a.

यदि कोई अनुक्रम $\{z_n\}$, a को अभिसरित होता हो, तब सिद्ध कीजिए कि $\{z_n\}$ का उपानुक्रम $\{z_{n_k}\}$ भी a को अभिसरित होगा।

(ii) State Jordan curve theorem.

जोरदाँ वक्र प्रमेय का कथन कीजिए।

(iii) Prove that $f(z)=\frac{1}{z}$ is not uniformly continuous in domain $|z| < 1$.

सिद्ध कीजिए कि प्रान्त $|z| < 1$ में $f(z)=\frac{1}{z}$ एकसमान सतत् नहीं है।

(iv) Prove that function $u = \cos x.\cosh y$ is harmonic.

सिद्ध कीजिए कि फलन $u = \cos x.\cosh y$ प्रसंवादी है।

(v) Define conditional convergence of power series.

घात श्रेणी के सशर्त अभिसरण को परिभाषित कीजिए।

(vi) Find radius of convergence of :

$$\sum \frac{(n+1)}{(n+2)(n+3)} z^n$$

घात श्रेणी $\sum \frac{(n+1)}{(n+2)(n+3)} z^n$ की अभिसरण त्रिज्या ज्ञात कीजिए।

(vii) Give an example of isogonal mapping which is not conformal.

ऐसे प्रतिचित्रण का उदाहरण दीजिए जो तुल्यकोणी प्रतिचित्रण हो मगर अनुकोण प्रतिचित्रण नहीं हो।

(viii) Define removable singularity.

अपनेय विचित्रता को परिभाषित कीजिए।

Section–B **4×10=40**

(Short Answer Type Questions)

खण्ड—ब

(लघु उत्तरीय प्रश्न)

2. Prove that if $\lim_{z \to z_0} f(z)$ exists then it is unique.

सिद्ध कीजिए कि यदि $\lim_{z \to z_0} f(z)$ विद्यमान हो, तो यह अद्वितीय होगा।

3. If :

$$u+v=\frac{2\sin 2x}{(e^{2y}+e^{-2y}-2\cos 2x)}$$

and $f(z) = u + iv$ is an analytic function then find $f(z)$ in terms of z.

यदि :

$$u+v=\frac{2\sin 2x}{(e^{2y}+e^{-2y}-2\cos 2x)}$$

तथा $f(z) = u + iv$ एक विश्लेषिक फलन हो तो $f(z)$ को z के पदों में ज्ञात कीजिए।

4. Prove that bilinear transformation $w=\frac{az+b}{cz+d}$ is joint transformation of basic transformation.

सिद्ध कीजिए कि द्विरैखिक रूपान्तरण $w=\frac{az+b}{cz+d}$ मूलभूत रूपान्तरणों का संयुक्त प्रतिचित्रण है।

5. State and prove Cauchy's Integral Formula.

कोशी समाकल सूत्र को कथन कर सिद्ध कीजिए।

6. State and prove Taylor's theorem.

टेलर प्रमेय को कथन कर सिद्ध कीजिए।

7. Describe singularities of function $f(z)=\frac{1}{z(e^z-1)}$ and expand function for $0 < |z| < 2\pi$.

फलन $f(z)=\frac{1}{z(e^z-1)}$ की विचित्रताओं की विवेचना करते हुए $0 < |z| < 2\pi$ के लिए फलन का प्रसार कीजिए।

8. Prove that all roots of equation $z^7 - 5z^3 + 12 = 0$ are lie between concentric circles $C_1 : |z| = 1$ and $C_2 : |z| = 2$.

सिद्ध कीजिए कि समीकरण $z^7 - 5z^3 + 12 = 0$ के सभी मूल संकेन्द्रीय वृत्तों $C_1 : |z| = 1$ एवं $C_2 : |z| = 2$ के मध्य स्थित है।

9. Prove by line integral :

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{a\cos\theta}{a+\cos\theta} d\theta = 2\pi a \left\{1 - \frac{a}{\sqrt{a^2-1}}\right\}, \; a > 1$$

परिरेखा समाकलन से सिद्ध कीजिए कि :

$$\int_{-\pi}^{\pi} \frac{a\cos\theta}{a+\cos\theta} d\theta = 2\pi a \left\{1 - \frac{a}{\sqrt{a^2-1}}\right\}, \; a > 1$$