MT–07

December – Examination 2021

B.A./B.Sc. (Part III) Examination

MATHEMATICS

(First Paper)

(Algebra)

Paper : MT-07

Time : 1½ Hours] [*Maximum Marks : 47*

Note :– The question paper is divided into two Sections A and B. Section–A contains 8 Very Short Answer Type Questions. Examinees have to attempt any *four* questions. Each question is of 1¾ marks and maximum word limit may be **30** words. Section–B contains 8 Short Answer Type Questions. Examinees will have to answer any *four* questions. Each question is of 10 marks. Examinees have to delimit each answer in maximum **200** words. Use of non-programmable scientific calculator is allowed in this paper.

निर्देश :- प्रश्न-पत्र दो खण्डों अ और ब में विभाजित है। खण्ड-अ में 8 अति लघूत्तरात्मक प्रश्न हैं, परीक्षार्थियों को किन्हीं **चार** प्रश्नों को हल करना है। प्रत्येक प्रश्न का 1¾ अंक है और अधिकतम शब्द-सीमा **30** शब्द है। खण्ड-ब में 8 लघु उत्तरीय प्रश्न हैं, परीक्षार्थियों को किन्हीं **चार** प्रश्नों के उत्तर देना है। प्रत्येक प्रश्न 10 अंकों का है। परीक्षार्थियों को अधिकतम **200** शब्दों में प्रत्येक जवाब परिसीमित करने हैं। इस प्रश्न-पत्र में नॉन-प्रोग्रामेबल साइंटीफिक कैलकुलेटर के उपयोग की अनुमति है।

Section–A **1¾×4=7**

(Very Short Answer Type Questions)

खण्ड—अ

(अति लघु उत्तरीय प्रश्न)

1. (i) If inverse of each element is its inverse in a group G then prove that G is an commutative group.

यदि किसी समूह G के प्रत्येक अवयव का विलोम भी वही अवयव तो सिद्ध कीजिए कि G एक क्रमविनिमेय समूह है।

(ii) Define even and odd permutation.

सम और विषम क्रमचय को परिभाषित कीजिए।

(iii) Prove that finite group of finite order does not has any proper subgroup.

सिद्ध कीजिए कि अभाज्य कोटि के परिमित समूह का कोई उचित उपसमूह नहीं होता।

(iv) Prove that every group is homomorphic to its quotient group.

सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक समूह अपने विभाग समूह के समाकारी होता है।

(v) Define Division Ring.

भागफल वलय को परिभाषित कीजिए।

(vi) Define kernel of ring homeomorphism.

वलय समाकारिता की अष्टि को परिभाषित कीजिए।

(vii) State fundamental theorem of ring homeomorphism.

वलय समाकारिता के मूलभूत प्रमेय का कथन कीजिए।

(viii) Define basis of vector space.

सदिश समष्टि के आधार को परिभाषित कीजिए।

Section–B **4×10=40**

(Short Answer Type Questions)

खण्ड—ब

(लघु उत्तरीय प्रश्न)

2. If G = $\{(a, b) \mid a, b \in R, a \neq 0\}$ and operation '.' defined on G as $(a, b).(c, d) = (ac, bc + d)$ then prove that (G, .) is a non-commutative group.

यदि G = $\{(a, b) \mid a, b \in R, a \neq 0\}$ तथा '.' संक्रिया G में निम्न प्रकार परिभाषित है :

$(a, b).(c, d) = (ac, bc + d)$ तो सिद्ध कीजिए कि (G, .) एक अक्रमविनिमेय समूह है।

3. If H and K are any two finite subgroups of a commutative group and their orders are o(H) and o(K) then prove that :

$$o(HK) = \frac{o(H).o(K)}{o(H \cap K)}$$

यदि H और K किसी क्रमविनिमेय समूह G के दो परिमित उपसमूह हैं और उनकी कोटि o(H) व o(K) हैं तो सिद्ध कीजिए कि :

$$o(HK) = \frac{o(H).o(K)}{o(H \cap K)}$$

4. Prove that relation of isomorphism $\cong$ on set of groups is an equivalence relation.

   सिद्ध कीजिए कि समूहों के समुच्चय में तुल्यकारिता का सम्बन्ध $\cong$ एक तुल्यता सम्बन्ध है।

5. Prove that finite integral domain is always a field.

   सिद्ध कीजिए कि परिमित पूर्णांकीय प्रान्त सदैव एक क्षेत्र होता है।

6. Prove that commutative ring with unity R is a field if and only if R is a simple ring.

   सिद्ध कीजिए कि इकाई सहित क्रमविनिमेय वलय R क्षेत्र होता है यदि और केवल R सरल वलय है।

7. Prove that union of any two subspaces W_1 and W_2 of a vector space V(F) is a subspace if and only if $W_1 \subset W_2$ or $W_2 \subset W_1$.

   सिद्ध कीजिए कि किसी सदिश समष्टि V(F) की दो उपसमष्टिओं W_1 तथा W_2 का संघ, V की एक उपसमष्टि होता है यदि और केवल यदि $W_1 \subset W_2$ या $W_2 \subset W_1$।

8. Prove that linear span L(S) of a subset S of vector space V(F) is minimal subspace of V(F) that containing S.

   सिद्ध कीजिए कि किसी सदिश समष्टि V(F) के उपसमुच्चय S की एक घात विस्तृति L(S), S को अन्तर्विष्ट करने वाला V(F) की न्यूनतम उपसमष्टि है।

9. If V(F) is finite dimensional vector space and W is any subspace of V then prove that quotient space V/W is also finite dimensional and $\dim\left(\frac{V}{W}\right) = \dim V - \dim W.$

यदि V(F) एक परिमित विमीय सदिश समष्टि है तथा W, V की एक उपसमष्टि है, तब सिद्ध कीजिए कि विभाग समष्टि V/W भी परिमित विमा का होता है तथा विमा V/W = विमा V – विमा W।