MT–04

December – Examination 2021

B.A./B.Sc. (Part II) Examination

MATHEMATICS

(First Paper)

Real Analysis and Metric Space

Paper : MT-04

Time : 1½ Hours] [*Maximum Marks : 47*

Note :– The question paper is divided into two Sections A and B. Section–A contains 8 very short answer type questions. Examinees have to attempt any *four* questions. Each question is of 1¾ marks and maximum word limit may be **30** words. Section–B contains 8 short answer type questions. Examinees will have to answer any *four* questions. Each question is of 10 marks. Examinees have to delimit each answer in maximum **200** words. Use of non-programmable scientific calculator is allowed in this paper.

निर्देश :- यह प्रश्न-पत्र दो खण्डों 'अ' और 'ब' में विभाजित है। खण्ड-अ में 8 अति लघु उत्तरात्मक प्रश्न हैं, परीक्षार्थियों को किन्हीं **चार** प्रश्नों को हल करना है। प्रत्येक प्रश्न 1¾ अंक है और अधिकतम शब्द-सीमा **30** शब्द है। खण्ड-ब में 8 लघु उत्तर प्रकार के प्रश्न हैं, परीक्षार्थियों को किन्हीं **चार** सवालों के जवाब देना है। प्रत्येक प्रश्न 10 अंकों का है। परीक्षार्थियों को अधिकतम **200** शब्दों में प्रत्येक जवाब परिसीमित करने हैं। इस प्रश्नपत्र में नॉन-प्रोग्रामेबल साइंटीफिक कैलकुलेटर के उपयोग की अनुमति है।

Section–A $4\times1\frac{3}{4}=7$

(खण्ड—अ)

Very Short Answer Type Questions

(अति लघु उत्तरीय प्रश्न)

1. (i) Define bounded below set.

   नीचे से परिबद्ध समुच्चय को परिभाषित कीजिए।

   (ii) Prove that set of rational numbers is an Archimedean ordered field.

   सिद्ध कीजिए कि परिमेय संख्याओं का समुच्चय आर्किमिडीय क्रमित क्षेत्र होता है।

(iii) Prove that set of rational numbers Q is not an open set.

सिद्ध कीजिए कि परिमेय संख्याओं का समुच्चय Q विवृत समुच्चय नहीं होता है।

(iv) Prove that if a sequence $\{x_n\}$ converges to l, then its every subsequence $\{x_{v_n}\}$ converges to l.

सिद्ध कीजिए कि यदि एक अनुक्रम $\{x_n\}$, l को अभिसृत होती है, तो इसका प्रत्येक उपानुक्रम $\{x_{v_n}\}$ भी l को अभिसृत होता है।

(v) Define Oscillatory Sum.

दोलनी योगफल को परिभाषित कीजिए।

(vi) State Cauchy's principle for uniform convergence.

एकसमान अभिसरण के लिए कॉशी के सिद्धान्त का कथन कीजिए।

(vii) Define neighbourhood of a set in metric space.

दूरीक समष्टि में किसी समुच्चय के प्रतिवेश को परिभाषित कीजिए।

(viii) Define disconnected metric space.

असम्बद्ध दूरीक समष्टि को परिभाषित कीजिए।

Section–B **4×10=40**

(खण्ड—ब)

Short Answer Type Questions

(लघु उत्तरीय प्रश्न)

2. Prove that sequence $\{x_n\}$ converges to 2, where $x_1 = \sqrt{2}$ and $x_{n+1} = \sqrt{2x_n}$.

सिद्ध कीजिए कि अनुक्रम $\{x_n\}$, 2 की अभिसृत होगी, जहाँ $x_1 = \sqrt{2}$ और $x_{n+1} = \sqrt{2x_n}$ ।

3. Using Cauchy's principle for convergence, prove that sequence $x_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots\ldots.. + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ is convergent.

कोशी के सामान्य अभिसरण सिद्धान्त से सिद्ध कीजिए कि अनुक्रम

$x_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots\ldots + (-1)^{n-1}\frac{1}{n}$ अभिसारी है।

4. Prove that continuous function defined on close interval $[a, b]$ takes its maximum and minimum values at least ones in interval $[a, b]$.

   सिद्ध कीजिए कि संवृत्त अन्तराल $[a, b]$ में सतत् फलन, $[a, b]$ में न्यूनतम एक बार अपने उच्चक एवं निम्नक ग्रहण करता है।

5. Prove that every continuous function defined on interval $[a, b]$ is Riemann integrable on $[a, b]$.

   सिद्ध कीजिए कि अन्तराल $[a, b]$ पर परिभाषित प्रत्येक सतत् फलन, $[a, b]$ पर रीमान समाकलनीय होता है।

6. Evaluate :

$$\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)+\left(1+\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1+\frac{n}{n}\right)\right]^{1/n}$$

मान ज्ञात कीजिए :

$$\lim_{x\to\infty}\left[\left(1+\frac{1}{n}\right)+\left(1+\frac{2}{n}\right)\ldots\left(1+\frac{n}{n}\right)\right]^{1/n}$$

7. Examine continuity of sum function of series and integration by part of series whose nth term is :

$$u_n(x) = n^2 xe^{-n^2x^2} - (n-1)^2 xe^{-(n-1)^2x^2}; \quad \forall x = [0, 1]$$

   श्रेणी के योगफलन के सांतत्य एवं श्रेणी के पदशः समाकलन का परीक्षण कीजिए, जिसका n वाँ पद है :

$$u_n(x) = n^2 xe^{-n^2x^2} - (n-1)^2 xe^{-(n-1)^2x^2}; \quad \forall x = [0, 1]$$

8. If (X, d) is a metric space then show that :

$$|d(x_1, y_1) - d(x_2, y_2)| \le d(x_1, x_2) + d(y_1, y_2) \quad \forall x_1, x_2, y_1, y_2 \in X$$

   यदि (X, d) एक दूरीक समष्टि है, तो प्रदर्शित कीजिए कि :

$$|d(x_1, y_1) - d(x_2, y_2)| \le d(x_1, x_2) + d(y_1, y_2) \quad \forall x_1, x_2, y_1, y_2 \in X$$

9. If X and Y are metric spaces, then prove that a mapping $f : X \to Y$ is continuous on X if and only if in Y for any subset A of X $f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$.

यदि X तथा Y दूरीक समष्टियाँ हैं, तब सिद्ध कीजिए कि एक प्रतिचित्रण $f : X \to Y$, X पर सतत् है यदि और केवल यदि Y में X के किसी उपसमुच्चय A के लिए $f(\overline{A}) = \overline{f(A)}$ ।