

MPH-02

December – Examination 2021

M.Sc. (Previous) Examination

PHYSICS

(Mathematical Physics and
Numerical Analysis)

(गणितीय भौतिकी एवं सांख्यिकी विश्लेषण)

Paper : MPH-02

Time : 1½ Hours]

[Maximum Marks : 80

Note :- The question paper is divided into two Sections A and B. Write answers as per the given instructions. In case of any discrepancy, the English version will be final for all purposes. Check your paper code and paper title before starting the paper. **You are allowed to use a non-programmable calculator, however sharing of calculator is not allowed.**

निर्देश :- यह प्रश्न-पत्र 'अ' और 'ब' दो खण्डों में विभाजित है। प्रत्येक खण्ड के निर्देशानुसार प्रश्नों के उत्तर दीजिए। किसी भी विसंगति की स्थिति में अंग्रेजी रूप ही अंतिम माना जायेगा। प्रश्न-पत्र शुरू करने से पूर्व पेपर कोड व प्रश्न-पत्र शीर्षक जाँच लें। आपको बिना प्रोग्रामिंग वाले केलकुलेटर के उपयोग की अनुमति है, परन्तु केलकुलेटर के हस्तांतरण की अनुमति नहीं है।

Section-A

4×4=16

(Very Short Answer Type Questions)

Note :- Answer any *four* questions. As per the nature of the questions delimit your answer in one word, one sentence or maximum up to **30** words. Each question carries 4 marks.

खण्ड—अ

(अति लघु उत्तरीय प्रश्न)

निर्देश :- किन्हीं चार प्रश्नों के उत्तर दीजिए। आप अपने उत्तर को प्रश्नानुसार एक शब्द, एक वाक्य या अधिकतम **30** शब्दों में परिसीमित कीजिए। प्रत्येक प्रश्न 4 अंकों का है।

1. (i) Find the real values of a and b for the following complex quantity :

$$\exp\left(\frac{2+i\pi}{4}\right) = a + ib$$

निम्न सम्मिश्र राशि के लिए a तथा b का वास्तविक मान ज्ञात कीजिए :

$$\exp\left(\frac{2+i\pi}{4}\right) = a + ib$$

- (ii) Find the residue for the following complex function at its pole :

$$f(z) = \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^3$$

निम्न सम्मिश्र फलन के लिए रेजीड्युए का मान इसके ध्रुव पर ज्ञात कीजिए :

$$f(z) = \left(\frac{z+1}{z-1}\right)^3$$

- (iii) Find the sum of eigen values of the following

matrix :

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 7 & 8 & 6 \\ 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

दी गई मेट्रिक्स के आइगेन मानों का योग ज्ञात कीजिए :

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 4 \\ 7 & 8 & 6 \\ 4 & 3 & 5 \end{pmatrix}$$

- (iv) Write the values of the following :

(a) $\int_{-\infty}^{\infty} g(x) \delta(x-b) dx$

(b) $\delta_{jk} \varepsilon_{jkn}$

निम्न के मान लिखिए :

(अ) $\int_{-\infty}^{\infty} g(x) \delta(x-b) dx$

(ब) $\delta_{jk} \varepsilon_{jkn}$

(v) Evaluate $\int_0^1 f(x) dx$ by dividing the range into four equal parts using Trapezoidal rule. Here :

x	$f(x)$
0	1
0.25	0.82
0.5	0.62
0.75	0.38
1.0	0.15

समाकल $\int_0^1 f(x) dx$ का मान परास को चार बराबर

भागों में बांटते हुए ट्रेपेजोइडल नियम से ज्ञात कीजिए।

यहाँ :

x	$f(x)$
0	1
0.25	0.82
0.5	0.62
0.75	0.38
1.0	0.15

(vi) Find the Laplace transform of function

$$f(x) = \sin x \cos x.$$

फलन $f(x) = \sin x \cos x$ का लाप्लास रूपान्तर ज्ञात कीजिए।

(vii) Fourier transform of a pulse is given by :

$$g(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{\sin aw}{w} \right)$$

Plot the qualitatively $g(w)$ versus w graph.

एक स्पंद का फुरिएर रूपनात्र फलन निम्न है :

$$g(w) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \left(\frac{\sin aw}{w} \right)$$

$g(w)$ तथा w के मध्य गुणनात्मक रूप से ग्राफ बनाइए।

(viii) Function is given by :

$$\frac{J_0(x)-1}{x^2} = a + bx^2 + cx^4 + \dots$$

Here $J_0(x)$ is Bessel function. What are the value of a and b ?

फलन निम्न है :

$$\frac{J_0(x)-1}{x^2} = a + bx^2 + cx^4 + \dots$$

यहाँ $J_0(x)$ बेसल फलन है, तो a तथा b का मान क्या होगा ?

Section-B

4×16=64

(Short Answer Type Questions)

Note :- Answer any *four* questions. Each answer should not exceed **200** words. Each question carries 16 marks.

खण्ड—ब

(लघु उत्तरीय प्रश्न)

निर्देश :- किन्हीं **चार** प्रश्नों के उत्तर दीजिए। आप अपने उत्तर को अधिकतम **200** शब्दों में परिसीमित कीजिए। प्रत्येक प्रश्न 16 अंकों का है।

2. (a) Check whether the following complex function is analytic or not ?

$$\exp(x + iy)$$

यह जांच कीजिए कि निम्न सम्मिश्र फलन अनेलिटिक है अथवा नहीं ?

$$\exp(x + iy)$$

- (b) Find the all poles for the function :

$$f(z) = \frac{\cot \pi z}{z^2 + a^2}$$

Also find the residue at $z = ia$.

निम्न फलन के लिए सभी ध्रुव ज्ञात कीजिए :

$$f(z) = \frac{\cot \pi z}{z^2 + a^2}$$

तथा $z = ia$ पर रेजीड्यू भी ज्ञात कीजिए। 8+8

3. (a) Evaluate the integral :

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos ax}{x^2 + 1} dx$$

निम्न समाकल ज्ञात कीजिए :

$$\int_0^{\infty} \frac{\cos ax}{x^2 + 1} dx$$

- (b) Compute the integral along the counterclockwise oriented circle of radius of 2, $|z| = 2$:

$$\text{Integral} = \oint_C \frac{1-2z}{z(z-1)(z-3)} dz$$

त्रिज्या 2 के वामावर्त वृत्त के अनुदिश समाकल ज्ञात कीजिए, यहाँ $|z| = 2$:

$$\text{समाकल} = \oint_C \frac{1-2z}{z(z-1)(z-3)} dz \quad 8+8$$

4. Consider the vector field $\vec{F} = 4x\hat{i} - 2y^2\hat{j} + z^2\hat{k}$ and the (cylindric) volume V bounded by the planes $z = 0$ and $z = 3$ as well as by the surface $x^2 + y^2 = 4$. For given volume V using cylindrical coordinates calculate the following integral :

$$\int_V \text{div } \vec{F} dV$$

सदिश क्षेत्र $\vec{F} = 4x\hat{i} - 2y^2\hat{j} + z^2\hat{k}$ पर विचार कीजिए तथा बेलनाकार बद्ध आयतन V जो कि तल $z = 0$ तथा $z = 3$ तथा सतह $x^2 + y^2 = 4$ से बद्ध है दिए गए आयतन V के लिए निम्न समाकल का मान बेलनाकार निर्देशांकों का उपयोग करते हुए ज्ञात कीजिए :

$$\int_V \text{div } \vec{F} dV$$

5. Determine $f(x)$ in a Fourier Series. Also draw the $f(x)$ versus x graph :

$$f(x) = \begin{cases} 0; & -2 < x < -1 \\ k; & -1 < x < 1 \\ 0; & 1 < x < 2 \end{cases}$$

निम्न फलन $f(x)$ को फुरिएर श्रेणी में व्यक्त कीजिए फलन

$f(x)$ तथा x के मध्य ग्राफ भी बनाइए :

$$f(x) = \begin{cases} 0; & -2 < x < -1 \\ k; & -1 < x < 1 \\ 0; & 1 < x < 2 \end{cases}$$

6. Draw the curves for the following each Legendre polynomial versus x :

$$P_0(x), P_1(x), P_2(x), P_3(x)$$

निम्न दिए गए प्रत्येक लिजेंद्रे बहुपद के लिए x के साथ ग्राफ बनाइए :

$$P_0(x), P_1(x), P_2(x), P_3(x)$$

7. Consider the Gaussian probability function

$$f(x) = Ne^{-ax^2}, \text{ where } N \text{ and } \alpha \text{ are constants,}$$

where $\alpha > 0$. Find its Fourier transform $g(w)$, here

you can use $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} du = \text{constant}$, then also plot

the following graphs :

(a) $f(x)$ versus x for both large and small values

of α

(b) $g(w)$ versus w for both large and small values

of α

गॉसियन प्रायिकता फलन $f(x) = Ne^{-ax^2}$ को लीजिए, जहाँ

N तथा α अचर हैं तथा $\alpha > 0$ है। इस फलन का फुरिअर

रूपान्तर $g(w)$ ज्ञात कीजिए, यहाँ $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} du = \text{स्थिरांक}$ का

उपयोग कर सकते हैं तथा निम्न के मध्य ग्राफ बनाइए :

(अ) $f(x)$ तथा x के मध्य ग्राफ α के अल्प व अधिक मानों के लिए

(ब) $g(w)$ तथा w के मध्य ग्राफ α के अल्प व अधिक मानों के लिए

8. Find the Laplace transform of the following function :

$$7 \sin 3t + 3e^{-2t} \cos^2 t + 13 \sin 3t \cosh 7t$$

निम्न फलन का लाप्लास रूपान्तर ज्ञात कीजिए :

$$7 \sin 3t + 3e^{-2t} \cos^2 t + 13 \sin 3t \cosh 7t$$

9. Find a real root of the equation $x^2 - 2 = 0$ using Newton method.

समीकरण $x^2 - 2 = 0$ का वास्तविक मूल न्यूटन विधि द्वारा ज्ञात कीजिए।