MPH–03

December – Examination 2021

M.Sc. (Previous) Examination

PHYSICS

(Quantum Mechanics)

क्वांटम यांत्रिकी

Paper : MPH-03

Time : 1½ Hours] [*Maximum Marks :* ***80***

Note :– The question paper is divided into two Sections A and B. Write answers as per the given instructions. In case of any discrepancy, the English version will be final for all purposes. Check your paper code and paper title before starting the paper. Calculators are not allowed.

निर्देश :- यह प्रश्न-पत्र 'अ' और 'ब' दो खण्डों में विभाजित है। प्रत्येक खण्ड के निर्देशानुसार प्रश्नों के उत्तर दीजिए। किसी भी विसंगति की स्थिति में अंग्रेजी रूप ही अंतिम माना जायेगा। प्रश्न-पत्र शुरू करने से पूर्व पेपर कोड व प्रश्न-पत्र शीर्षक जाँच ले। केलकुलेटर के उपयोग की अनुमति नहीं है।

Section–A 4×4=16

(Very Short Answer Type Questions)

Note :– Answer any *four* questions. As per the nature of the question delimit your answer in one word, one sentence or maximum up to **30** words. Each question carries 4 marks.

खण्ड–अ

(अति लघु उत्तरीय प्रश्न)

निर्देश :- किन्हीं **चार** प्रश्नों के उत्तर दीजिए। आप अपने उत्तर को प्रश्नानुसार एक शब्द, एक वाक्य या अधिकतम **30** शब्दों में परिसीमित कीजिए। प्रत्येक प्रश्न 4 अंकों का है।

1. (i) Pauli matrix is given by $\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$. Obtain the final matrix form of $\sigma_x\, \sigma_y\, \sigma_z$.

पाउली मेट्रिक्स $\sigma_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ द्वारा दी जाती है तो σ_x $\sigma_y\, \sigma_z$ का अंतिम मेट्रिक्स प्राप्त कीजिए।

(ii) An energy eigen wavefunction is given by $\psi = \sin 7x + \cos 7x$. If $p = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}$ is momentum operator, then what is the energy eigen value of the operator $\frac{p^2}{2m}$?

ऊर्जा आइगेन फलन $\psi = \sin 7x + \cos 7x$ द्वारा दिया जाता है। यदि संवेग संकारक $p = -i\hbar\frac{\partial}{\partial x}$ है, तो संकारक $\frac{p^2}{2m}$ की ऊर्जा आईगेन मान क्या है ?

(iii) The set of eigenfunctions ψ_n forms a complete set of normalized and orthogonal functions, then $\int \psi_m \psi_n^* \, dq = Z$. What does Z represent ?

यदि आइगेनफलनों ψ_n का सेट प्रासमान्यकृत तथा लाम्बिक पूर्ण सेट बनाते है तथा $\int \psi_m \psi_n^* \, dq = Z$ तो Z क्या प्रदर्शित करता है ?

(iv) The unperturbed wave function for infinite square well for n = 2 state is $\psi_2^0(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{2\pi}{a} x\right)$. Suppose we perturb the system by simply raising the floor of the well a constant amount V_0. The first order correction to n = 2 state is given by $E_2^1 = \int_0^a \psi_2^0(x) V_0 \psi_2^0(x) dx$. Calculate the value of E_2^1.

अनंत वर्गाकार कुएँ के लिए n = 2 के लिए बिनाविक्षोभ का तरंग फलन $\psi_2^0(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin\left(\frac{2\pi}{a} x\right)$ द्वारा दिया जाता है। यदि हम साधारणतया कुएँ के तल को अचर परिमाण V_0 से ऊपर उठाकर विक्षोभित करते हैं। प्रथम कोटि का संशोधन n = 2 अवस्था के लिए $E_2^1 = \int_0^a \psi_2^0(x) V_0 \psi_2^0(x) dx$ द्वारा दिया जाता है तो E_2^1 के मान की गणना कीजिए।

(v) If matrix elements of S_x and S_y are $S_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $S_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$, then find the commutator $[S_x, S_y]$.

यदि मेट्रिक्स अवयव S_x तथा S_y है $S_x = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$, $S_y = \begin{pmatrix} 0 & -i \\ i & 0 \end{pmatrix}$ तो क्रम विनिमयक $[S_x, S_y]$ ज्ञात कीजिए।

(vi) For linear and angular momentum operators, write the value of :

$$[p^2, L_x] + [p^2, L_y] + [p^2, L_z]$$

रेखीय व कोणीय संवेग संकारकों के लिए निम्न का मान लिखिए :

$$[p^2, L_x] + [p^2, L_y] + [p^2, L_z]$$

(vii) An electron state is described by the spin as given in the basis as :

$$Y = \begin{bmatrix} \frac{5i}{\sqrt{31}} \\ \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{31}} \end{bmatrix}$$

What is the probability that the electron has spin up ?

आधार के रूप में इलेक्ट्रॉन की स्पिन अवस्था निम्न तरह से दी जाती है :

$$Y = \begin{bmatrix} \frac{5i}{\sqrt{31}} \\ \frac{\sqrt{6}}{\sqrt{31}} \end{bmatrix}$$

इलेक्ट्रॉन के स्पिन अप होने की प्रायिकता क्या होगी ?

(viii) A particle of mass m is moving (one (dimension) in a region of constant potential energy V_0. The particle has total energy $\frac{V_0}{5}$, where V_0 is positive number. Find the general solution of time independent Schrödinger equation for this problem.

द्रव्यमान m का एक कण एक अचर स्थितिज ऊर्जा V_0 क्षेत्र में गति (एक विमीय) कर रहा है। कण की कुल ऊर्जा $\frac{V_0}{5}$ है जहाँ V_0 एक धनात्मक संख्या है। इस कण के लिए काल अनाश्रित श्रोडिंगर समीकरण का हल ज्ञात कीजिए।

Section–B 4×16=64

(Short Answer Type Questions)

Note :– Answer any *four* questions. Each answer should not exceed **200** words. Each question carries 16 marks.

खण्ड—ब

(लघु उत्तरीय प्रश्न)

निर्देश :- किन्हीं **चार** प्रश्नों के उत्तर दीजिए। आप अपने उत्तर को अधिकतम **200** शब्दों में परिसीमित कीजिए। प्रत्येक प्रश्न 16 अंकों का है।

2. Write the conditions for well behaved wavefunction.

   एक सुव्यवहारित तरंगफलन के लिए शर्तें लिखिए।

3. Prove that the fundamental communication relation $[x, p_x] = \frac{ih}{2\pi}$ remains unchanged under unitary transformation.

   यह दर्शाइए कि मूलभूत क्रमविनिमय सम्बन्ध $[x, p_x] = \frac{ih}{2\pi}$ यूनिटरी रूपांतरण में अपरिवर्तित रहता है।

4. Prove that uncertainty product for linear harmonic oscillator is :

$$\Delta x \Delta p = \left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{h}{2\pi}$$

यह दर्शाइए कि एक रेखीय आवर्ती दोलित्र के लिए अनिश्चितता गुणनफल निम्न होगा :

$$\Delta x \Delta p = \left(n + \frac{1}{2}\right) \frac{h}{2\pi}$$

5. Use the W.K.B. method to calculate the transmission coefficient for the potential barrier :

$$V(x) = \begin{cases} V_0 - ax & ; \quad x > 0 \\ 0 & ; \quad x < 0 \end{cases}$$

विभव अवरोध के लिए W.K.B. विधि द्वारा पारगमन गुणांक ज्ञात कीजिए :

$$V(x) = \begin{cases} V_0 - ax & ; \quad x > 0 \\ 0 & ; \quad x < 0 \end{cases}$$

6. A linear harmonic oscillator is perturbed by $\frac{1}{2}\alpha x^2$.

Determine the correction in energy value up to first order using perturbation theory for state $n = 3$.

एक रेखीय आवर्ती दोलित्र $\frac{1}{2}\alpha x^2$ द्वारा विक्षोभित किया जाता है, विक्षोभ सिद्धांत द्वारा प्रथम कोटि का $n = 3$ अवस्था ऊर्जा में संशोधन ज्ञात कीजिए।

7. Consider the following two kets :

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} -3i \\ 2+i \\ 4 \end{pmatrix} \text{ and } |\phi\rangle = \begin{pmatrix} 2 \\ -i \\ 2-3i \end{pmatrix}$$

Evaluate the scalar product $\langle\psi|\phi\rangle$. Also examine why the products $|\psi\rangle|\phi\rangle$ and $|\phi\rangle|\psi\rangle$ do not make sense.

निम्न दो केट पर विचार कीजिए :

$$|\psi\rangle = \begin{pmatrix} -3i \\ 2+i \\ 4 \end{pmatrix} \text{ तथा } |\phi\rangle = \begin{pmatrix} 2 \\ -i \\ 2-3i \end{pmatrix}$$

अदिश गुणन $\langle\psi|\phi\rangle$ को ज्ञात कीजिए तथा यह भी बताइए गुणन $|\psi\rangle|\phi\rangle$ तथा $|\phi\rangle|\psi\rangle$ का कोई तात्पर्य नहीं है।

8. Obtain the solution $\Phi(\phi)$ for hydrogen atom.
हाइड्रोजन परमाणु के लिए $\Phi(\phi)$ हल प्राप्त कीजिए।

9. Obtain the equation of continuity for probability in quantum mechanics.
क्वांटम यांत्रिकी में प्रायिकता सततता समीकरण प्राप्त कीजिए।