

6. Prove that the intersection of two subrings is again a subring.

सिद्ध कीजिए कि दो उपवलयों का सर्वनिष्ठ भी एक उपवलय होता है।

7. If I_1 and I_2 be two ideals of a ring R , then show that :

$$I_1 + I_2 = \{a_1 + a_2 \mid a_1 \in I_1, a_2 \in I_2\}$$

is an ideal of R containing both I_1 and I_2 .

यदि I_1 और I_2 किसी वलय R की दो गुणजावलियाँ हों तो सिद्ध कीजिए कि :

$$I_1 + I_2 = \{a_1 + a_2 \mid a_1 \in I_1, a_2 \in I_2\}$$

भी R की एक गुणजावली होगी जिसमें I_1 और I_2 दोनों अन्तर्विष्ट हैं।

8. Show that the following vectors span the vector space R^3 :

$$\alpha_1 = (1, 1, 1); \alpha_2 = (2, 2, 0); \alpha_3 = (3, 0, 0)$$

सिद्ध कीजिए कि निम्न सदिश, सदिश समष्टि R^3 की विस्तृति करते हैं :

$$\alpha_1 = (1, 1, 1); \alpha_2 = (2, 2, 0); \alpha_3 = (3, 0, 0)$$

9. If W be a subspace of a finite dimensional vector space $V(F)$, then show that :

$$\dim\left(\frac{V}{W}\right) = \dim V - \dim W$$

यदि W एक परिमित विमीय सदिश समष्टि $V(F)$ की एक उपसमष्टि है तो सिद्ध कीजिए कि :

$$\dim\left(\frac{V}{W}\right) = \dim V - \dim W$$

MT-07

December – Examination 2020

B.A./B.Sc. (Part III) Examination

MATHEMATICS

(Algebra)

Paper : MT-07

Time : 2 Hours]

[Maximum Marks : 47

Note :- The question paper is divided into two Sections A and B. Write answers as per the given instructions.

निर्देश :- यह प्रश्न-पत्र 'अ' और 'ब' दो खण्डों में विभाजित है। प्रत्येक खण्ड के निर्देशानुसार प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

Section-A

7×1=7

(Very Short Answer Type Questions)

Note :- Answer all questions. As per the nature of the question delimit your answer in one word, one sentence or maximum up to 30 words. Each question carries 1 mark.

खण्ड—अ

(अति लघु उत्तरीय प्रश्न)

निर्देश :- सभी प्रश्नों के उत्तर दीजिए। आप अपने उत्तर को प्रश्नानुसार एक शब्द, एक वाक्य या अधिकतम 30 शब्दों में परिसीमित कीजिए। प्रत्येक प्रश्न 1 अंक का है।

1. (i) Define Commulative Group.
क्रम विनिमेय समूह को परिभाषित कीजिए।
- (ii) Define order of an element of a group.
समूह के अवयव की कोटि को परिभाषित कीजिए।
- (iii) Define index of a subgroup.
उपसमूह के सूचकांक को परिभाषित कीजिए।
- (iv) Define linear dependence of vectors.
सदिशों की एकघाती आश्रितता को परिभाषित कीजिए।
- (v) Define Prime Ideal.
अभाज्य गुणजावली को परिभाषित कीजिए।
- (vi) Define kernel of homomorphism.
समाकारिता की अष्टि को परिभाषित कीजिए।
- (vii) Define quotient space.
विभाग समष्टि को परिभाषित कीजिए।

Section—B

4×10=40

(Short Answer Type Questions)

Note :- Answer any four questions. Each answer should not exceed 200 words. Each question carries 10 marks.

खण्ड—ब

(लघु उत्तरीय प्रश्न)

निर्देश :- किन्हीं चार प्रश्नों के उत्तर दीजिए। आप अपने उत्तर को अधिकतम 200 शब्दों में परिसीमित कीजिए। प्रत्येक प्रश्न 10 अंकों का है।

2. Show that the set of all the matrices of the form

$$A_\alpha = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}, \alpha \in \mathbb{R}$$

is an abelian group for matrix multiplication.

सिद्ध कीजिए कि :

$$A_\alpha = \begin{bmatrix} \cos \alpha & -\sin \alpha \\ \sin \alpha & \cos \alpha \end{bmatrix}, \alpha \in \mathbb{R}$$

प्रकार की सभी मैट्रिक्सेज का समुच्चय मैट्रिक्स गुणन के लिए आबेली समूह है।

3. If G is a group such that $(ab)^m = a^m b^m$ for three consecutive integers $m, m + 1, m + 2$ for all $a, b \in G$; show that G is abelian.
यदि किसी समूह G में तीन क्रमागत पूर्णांकों $m, m + 1, m + 2$ के लिए $(ab)^m = a^m b^m \forall a, b \in G$; तो सिद्ध कीजिए कि G एक आबेली समूह है।
4. Prove that the order of a finite cyclic group is equal to the order of its generator.
सिद्ध कीजिए कि एक परिमित चक्रीय समूह की कोटि उसके जनक की कोटि के बराबर होती है।
5. Show that every field is an integral domain but the converse is not necessarily true.
सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक क्षेत्र अनिवार्यतः पूर्णाकीय प्रान्त होता है परन्तु इसका विलोम सदैव सत्य नहीं होता है।