

MT-08

December - Examination 2019

B.A./B.Sc. Pt. III Examination**Complex Analysis****Paper - MT-08****Time : 3 Hours]****[Max. Marks :- 47**

Note: The question paper is divided into three sections A, B and C. Write answers as per the given instructions. Use of non-programmable scientific calculator is allowed in this paper.

निर्देश : प्रश्न पत्र तीन खण्डों 'अ', 'ब' और 'स' में विभाजित है। प्रत्येक खण्ड के निर्देशानुसार प्रश्नों के उत्तर दीजिए। इस प्रश्नपत्र में नॉन-प्रोग्रामेबल साइंटिफिक कैल्कुलेटर के उपयोग की अनुमति हैं।

Section - A**7 × 1 = 7**

(Very Short Answer Type Questions)

Note: Answer all Questions. As per the nature of the question delimit your answer in one word, one sentence or maximum up to 30 words. Each question carries 1 mark.

खण्ड - 'अ'

(अति लघु उत्तरीय प्रश्न)

निर्देश : सभी प्रश्नों के उत्तर दीजिए। आप अपने उत्तर को प्रश्नानुसार एक शब्द, एक वाक्य या अधिकतम 30 शब्दों में परिसीमित कीजिए। प्रत्येक प्रश्न 1 अंक का है।

- 1) (i) Write all the n^{th} root of unity.
इकाई के सभी $n^{\text{वें}}$ मूल लिखिए।
- (ii) For what values of z following function is not continuous?
 z के किन मानों के लिए निम्न फलन संतत नहीं है?
- (iii) Write formula for radius R of convergence of a power series $\sum a_n z^n$.
घात श्रेणी $\sum a_n z^n$ की अभिसरण त्रिज्या R ज्ञात करने के लिए सूत्र लिखिए।
- (iv) Define invariant points of a transformation.
किसी रूपान्तरण के निश्चर बिन्दु (स्थिर बिन्दु) को परिभाषित कीजिए।
- (v) Write poles of $\frac{z+2}{(z-1)(z^2+1)}$
 $\frac{z+2}{(z-1)(z^2+1)}$ के अनंतक लिखिए।
- (vi) State Liouville's Theorem
ल्यूवेल प्रमेय का कथन कीजिये।
- (vii) Define isolated singularities of analytic function.
विश्लेषिक फलन की वियुक्त विचित्रताएँ को परिभाषित कीजिये।

Section - B**4 × 5 = 20**

(Short Answer Type Questions)

Note: Answer any four question. Each answer should not exceed 200 words. Each question carries 5 marks.

(खण्ड - ब)

(लघु उत्तरीय प्रश्न)

निर्देश : किन्ही चार प्रश्नों के उत्तर दीजिए। आप अपने उत्तर को अधिकतम 200 शब्दों में परिसीमित कीजिए। प्रत्येक प्रश्न 5 अंको का है।

- 2) Prove that any open subset S of set of complex numbers C is connected if and only if for any two points a and b in S there exists a polygon which lie entirely in S .

सिद्ध कीजिये कि सम्मिश्र संख्याओं का समुच्चय C का एक अरिक्त विवृत्त उपसमुच्चय S सम्बद्ध है यदि और केवल यदि S के किन्हीं दो बिन्दुओं a, b के लिए a से b तक एक ऐसा बहुभुज विद्यमान है, जो पूर्णतया S में स्थित है।

- 3) State and prove Cauchy-Hadamard theorem for power series.
घात श्रेणी के लिए कोशी-हाडामार्ड प्रमेय का कथन कर सिद्ध कीजिये।
- 4) Prove that $f(z)$ is analytic at z_0 then it is necessarily continuous at z_0 . Show that its converse is not necessary true by giving an example.
सिद्ध कीजिए कि $f(z)$ पर z_0 विश्लेषिक है तो वह z_0 पर आवश्यक रूप से संतत है। एक उदाहरण देकर प्रदर्शित कीजिए कि इसका विलोम सत्य होना आवश्यक नहीं है।

5) Describe the transformation $w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$

रूपान्तरण $w = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ की व्याख्या कीजिये।

6) State and prove Morera Theorem.

मोरेरा प्रमेय को कथन कर सिद्ध कीजिये।

7) Prove that every function whose singularities in extended complex plane are only poles, is a rational function.

सिद्ध कीजिए कि प्रत्येक फलन, जिसकी विस्तारित सम्मिश्र तल में विचित्रताएँ केवल अनन्तक ही हैं, परिमेय फलन है।

8) Find residue of function $f(z) = \frac{z^2}{(z-1)(z-2)(z-3)}$ at $z = 1, 2,$ and 3 and at $z = \infty$ and show that sum of residue is zero.

फलन $f(z) = \frac{z^2}{(z-1)(z-2)(z-3)}$, $z = 1, 2,$ व 3 एवं $z = \infty$ पर

अवशेष ज्ञात कीजिये तथा प्रदर्शित कीजिये कि उनका योग शून्य है।

9) Explain the following निम्न को समझाइए :-

(i) Analytic continuation along a chain of domains

प्रांतों की श्रृंखला के अनुदिश विश्लेषिक सांतत्य

- (ii) Analytic continuation by a power series
घात श्रेणी द्वारा विश्लेषिक सांतत्य

Section - C

2 × 10 = 20

(Long Answer Type Questions)

Note: Answer any two questions. You have to delimit your each answer maximum upto 500 words. Each question carries 10 marks.

(खण्ड - स)

(दीर्घ उत्तरीय प्रश्न)

निर्देश : किन्ही दो प्रश्नों के उत्तर दीजिए। अपने उत्तर अधिकतम 500 शब्दों में परिसीमित कीजिए। प्रत्येक प्रश्न 10 अंको का है।

- 10) (a) Prove that if $f(z)$ is continuous in a compact set S then it is uniformly continuous in S .

सिद्ध कीजिये कि यदि $f(z)$ एक संहत समुच्चय S में संतत हो तो वह S में एकसमान संतत होता है।

- (b) If $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ exists then prove that it is unique.

यदि $\lim_{z \rightarrow z_0} f(z)$ विद्यमान हो, तो सिद्ध कीजिए कि यह अद्वितीय होगा।

- 11) Define Bilinear transformation. Find all Bilinear transformations which transform upper half plane $\text{Im } \text{aginary}(z) \geq 0$ to circular disc $|w| \leq 1$.

द्विरैखिक रूपान्तरण को परिभाषित कीजिये। वह सभी द्विरैखिक रूपान्तरण ज्ञात कीजिये जो ऊपरी अर्धतल $\text{Im } \text{aginary}(z) \geq 0$ को वृत्तीय डिस्क $|w| \leq 1$ में प्रतिचित्रित करें।

12) Expand function $f(z) = \frac{z^2 - 4}{(z + 1)(z + 4)}$ valid in region

- (i) $|z| < 1$ (ii) $1 < |z| < 4$ (iii) $|z| > 4$

फलन $f(z) = \frac{z^2 - 4}{(z + 1)(z + 4)}$ का प्रसार करो जो कि निम्न के लिये वैध हो

- (i) $|z| < 1$ (ii) $1 < |z| < 4$ (iii) $|z| > 4$

13) State and prove maximum modulus theorem.

महत्तम मापांक प्रमेय का कथन कर सिद्ध कीजिये।
