

MT-07

December - Examination 2019

B.A. / B.Sc. Pt. III Examination**Algebra****Paper - MT-07****Time : 3 Hours]****[Max. Marks :- 47**

Note: The question paper is divided into three sections A, B and C.
Write answers as per the given instructions.

निर्देश : यह प्रश्न पत्र 'अ', 'ब' और 'स' तीन खण्डों में विभाजित है। प्रत्येक खण्ड के निर्देशानुसार प्रश्नों के उत्तर दीजिए।

Section - A**7 × 1 = 7**

(Very Short Answer Questions)

Note: Answer **all** questions. As per the nature of the question delimit your answer in one word, one sentence or maximum up to 30 words. Each question carries 1 marks.

खण्ड - 'अ'

(अति लघु उत्तरीय प्रश्न)

निर्देश : सभी प्रश्नों के उत्तर दीजिए। आप अपने उत्तर को प्रश्नानुसार एक शब्द, एक वाक्य या अधिकतम 30 शब्दों में परिसीमित कीजिए। प्रत्येक प्रश्न 1 अंकों का है।

- 1) (i) What is the order of identity element a group?
किसी समूह में तत्समक अवयव की कोटि कितनी होती है?
- (ii) Give an example of an abelian group of order 3.
तीन कोटि के क्रमविनिमेय (आबेली) समूह का उदाहरण दीजिए।
- (iii) If N is a normal subgroup of a finite group G then write the value of $O\left(\frac{G}{N}\right)$.
यदि N एक परिमित समूह G का प्रसामान्य उपसमूह है तो $O\left(\frac{G}{N}\right)$ का मान बताइये।
- (iv) Give an example of commutative ring.
एक क्रमविनिमेय वलय का उदाहरण दीजिये।
- (v) What is the characteristic of a field $(Z_7, +_7, \times_7)$ and $Z_7 = \{0, 1, 2, \dots, 6\}$?
क्षेत्र $(Z_7, +_7, \times_7)$, जहाँ $Z_7 = \{0, 1, 2, \dots, 6\}$ का अभिलक्षण क्या होगा?
- (vi) Define linear combination of vectors.
सदिशों का एकघात संचय को परिभाषित कीजिये।
- (vii) Define dimension of a vector space.
सदिश समष्टि की विमा को परिभाषित कीजिये।

Section - B

4 × 5 = 20

(Short Answer Questions)

Note: Answer **any four** questions. Each answer should not exceed 200 words. Each question carries 5 marks.

(खण्ड - ब)

(लघु उत्तरीय प्रश्न)

निर्देश : किन्हीं चार प्रश्नों के उत्तर दीजिए। आप अपने उत्तर को अधिकतम 200 शब्दों में परिसीमित कीजिए। प्रत्येक प्रश्न 5 अंकों का है।

2) Let G is a set of ordered pairs (a, b) of real numbers a and b . Binary operation $*$ is defined in G as follow $(a,b) * (c,d) = (ac, bc + d)$. Prove that $(G, *)$ is a group. Is it an Abelian group?

माना G , वास्तविक संख्याओं a, b के क्रमित युग्मों (a, b) का समुच्चय है। G में द्विआधारी संक्रिया $*$ निम्न प्रकार परिभाषित है:— $(a,b) * (c,d) = (ac, bc + d)$ सिद्ध कीजिये कि $(G, *)$ समूह है। क्या यह आबेली समूह है?

3) Prove that order of cycle of length m is equal to m .

सिद्ध कीजिये कि m लंबाई के चक्र की कोटि m होती है।

4) If H is a subgroup of group G then for any $a, b \in G$, prove that

(i) $aH \sim bH$ (ii) $aH \sim Ha$ (3+2)

यदि H किसी समूह G का एक उपसमूह है तो सिद्ध कीजिये कि किन्हीं $a, b \in G$ के लिये

(i) $aH \sim bH$ (ii) $aH \sim Ha$

- 5) Prove that quotient group of an abelian group is abelian but converse is not necessary true.

सिद्ध कीजिये कि किसी आबेली समूह का विभाग समूह आबेली होता है परन्तु विलोम अनिवार्यतः सत्य नहीं है।

- 6) Prove that ring $(Z_n +_n \times_n)$ where $Z_n = \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ is an integral domain if and only if n is a prime number.

सिद्ध कीजिये कि वलय $(Z_n +_n \times_n)$ जहाँ $Z_n = \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$ एक पूर्णांकीय प्रान्त है यदि और केवल यदि n एक अभाज्य संख्या है।

- 7) Prove that every prime field of characteristic zero is isomorphic to field of rational numbers Q .

सिद्ध कीजिये कि प्रत्येक शून्य अभिलक्षण का अभाज्य क्षेत्र परिमेय संख्याओं के क्षेत्र Q के तुल्याकारी होता है।

- 8) Prove that no proper ideal of any field exists.

सिद्ध कीजिये कि किसी भी क्षेत्र की उचित गुणजावली विद्यमान नहीं होती है।

- 9) If W_1 and W_2 are subspaces of any finite dimensional vector space then prove that $\text{Dimension}(W_1 + W_2) = \text{Dimension } W_1 + \text{Dimension } W_2 - \text{Dimension}(W_1 \cap W_2)$

यदि W_1 एवं W_2 किसी परिमित विमीय सदिश समष्टि की दो उपसष्टियाँ हों, तो सिद्ध कीजिये कि विमा $(W_1 + W_2) = \text{विमा } W_1 + \text{विमा } W_2 - \text{विमा } (W_1 \cap W_2)$.

(Long Answer Questions)

Note: Answer **any two** questions. You have to delimit your each answer maximum up to 500 words. Each question carries 10 marks.

(खण्ड - स)

(दीर्घ उत्तरीय प्रश्न)

निर्देश : किन्हीं दो प्रश्नों के उत्तर दीजिए। आप अपने उत्तर को अधिकतम 500 शब्दों में परिसीमित करना है। प्रत्येक प्रश्न 10 अंकों का है।

10) State and prove Caley's theorem and use it to prove that permutation group of group $G = \{(1, -1, i, -i), \times\}$ is isomorphic to G .

कैले-प्रमेय का कथन कर सिद्ध कीजिये व इसका उपयोग करते हुए सिद्ध कीजिये कि समूह $G = \{(1, -1, i, -i), \times\}$ का क्रमचय समूह कीजिये जो G के साथ तुल्यकारी है।

(1+5+4)

11) Define ring. If F is a set of all functions (including constant function) defined on set of real numbers R , then prove that F is a ring for sum and product operations define in following way

$$(i) (f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

$\forall f, g \in F$ तथा प्रत्येक $x \in R$ के लिये

$$(ii) f(g)(x) = f(x).g(x)$$

वलय को परिभाषित कीजिये। यदि F , वास्तविक संख्याओं के समुच्चय R पर परिभाषित समस्त वास्तविक फलनों (स्थिरांक फलन सहित) का

समुच्चय है, तब सिद्ध कीजिये निम्न प्रकार परिभाषित योग तथा गुणन की संक्रियाओ के सापेक्ष, F एक वलय है।

$$(i) \quad (f + g)(x) = f(x) + g(x)$$

$$(ii) \quad f(g)(x) = f(x) \cdot g(x) \quad \forall f, g \in f \text{ तथा प्रत्येक } x \in R \text{ के लिये} \quad (2+8)$$

12) Prove that a ring without unity can be embedded into a ring with unity.

सिद्ध कीजिये कि इकाई अवयव रहित वलय को किसी इकाई अवयव सहित वलय में अंतस्थापित किया जा सकता है।

13) (i) Show that set $S = \{v_1 = (1,0,0), v_2 = (1,1,0), v_3 = (1,1,1)\}$ is a basis of vector space $V(R) = \{(a,b,c) \mid a,b,c \in R\}$

प्रदर्शित कीजिये कि समुच्चय $S = \{v_1 = (1,0,0), v_2 = (1,1,0), v_3 = (1,1,1)\}$ सदिश समष्टि $V(R) = \{(a,b,c) \mid a,b,c \in R\}$ का आधार है।

(ii) Show that intersection of any two subspaces of a vector space is also a subspace of that vector space.

प्रदर्शित कीजिये कि किसी सदिश समष्टि के किन्हीं दो उपसमष्टिओ का सर्वनिष्ठ भी उस सदिश सामीष्टि की उपसमष्टि होती है।