MT-07

December - Examination 2018

B.A. / B.Sc. Pt. III Examination

Algebra

Paper - MT-07

Time : 3 Hours] **[Max. Marks :- 67**

Note: The question paper is divided into three sections A, B and C. Use of non-programmable scientific calculator is allowed in this paper.

निर्देश : प्रश्न पत्र तीन खण्डों 'अ', 'ब' और 'स' में विभाजित है। इस प्रश्नपत्र में नॉन–प्रोग्रामेबल साइंटीफिक केल्कुलेटर के उपयोग की अनुमति हैं।

Section - A **$7 \times 1 = 7$**

(Very Short Answer Type Questions)

Note: Section 'A' contains Very short Answer Type Questions. Examinees have to attempt all questions. Each question is of 01 marks and maximum word limit may be thirty words.

खण्ड – 'अ'

(अति लघु उत्तरीय प्रश्न)

निर्देश : खण्ड 'अ' में सात (07) अतिलघुउत्तरात्मक प्रश्न हैं, परीक्षार्थियों को सभी प्रश्नों को हल करना हैं। प्रत्येक प्रश्न को 01 अंक है और अधिकतम शब्द सीमा तीस शब्द हैं।

1) (i) Define order of the group.

समूह की कोटि को परिभाषित कीजिये।

(ii) Define normal subgroup.
प्रसामान्य उपसमूह को परिभाषित कीजिये।

(iii) Find quotient group G/N where
विभाग समूह G/N ज्ञात कीजिये जबकि
$G = \left\langle \{1, -1, i, -i\}, . \right\rangle$ (and) और $N = \left\langle \{1, -1\}, . \right\rangle$

(iv) Define Boolean ring.
बूलीय वलय को परिभाषित कीजिये।

(v) Does there exist the proper ideal of ring $\left(Z_5, +_5, \times_5\right)$? Justify your answer,
क्या वलय $\left(Z_5, +_5, \times_5\right)$ की उचित गुणजावली विद्यमान है? अपने उत्तर की पुष्टि कीजिये।

(vi) Define linear span of vectors.
सदिशों की एकघाती विस्तृति को परिभाषित कीजिये।

(vii) Let V be the vector space of 2 × 2 matrices over field R. Again let $U = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| a, b \in R \right\}$ and $W = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} \middle| a, c \in R \right\}$ are subspaces of V(R). Find U + W.
माना V वास्तविक संख्याओं के क्षेत्र R पर समस्त 2×2 मैट्रिक्स का सदिश समष्टि है। पुन: माना $U = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \middle| a, b \in R \right\}$ और $W = \left\{ \begin{pmatrix} a & 0 \\ c & 0 \end{pmatrix} \middle| a, c \in R \right\}$ दोनों V(R) की उपसमष्टि हैं। U + W का मान बताइए।

Section - B $\quad 4 \times 8 = 32$

(Short Answer Type Questions)

Note: Section 'B' contain 08 short Answer Type Questions. Examinees will have to answer any four (4) question. Each question is of 08 marks. Examinees have to delimit each answer in maximum 200 words.

खण्ड – ब

(लघु उत्तरीय प्रश्न)

निर्देश : खण्ड 'ब' में आठ लघु उत्तर प्रकार के प्रश्न हैं, परीक्षार्थियों को किन्ही भी चार (04) सवालों के जवाब देना हैं। प्रत्येक प्रश्न 08 अंक का है। परीक्षार्थियों को अधिकतम 200 शब्दों में प्रत्येक जवाब परिसीमित करने हैं।

2) Show that the set G = { 0, 1, 2, 3, 4} is the commutative group for the operation $+_5$ (modulo addition 5 or congruence modulo 5), where $+_5$ is defined as

प्रदर्शित कीजिए की समुच्चय G = { 0, 1, 2, 3, 4} संक्रिया $+_5$ (मॉड्यूलों योग 5 या समशेष मॉड 5) के लिए एक क्रमविनिमेय समूह है, जहाँ संक्रिया $+_5$ निम्न प्रकार परिभाषित है।

$$a +_5 b = \begin{cases} a+b & \text{यदि } a+b<5 \\ a+b-5 & \text{यदि } a+b>5 \end{cases}$$

3) Find all cosets of $H = \{0, 2\}$ in $G = \{Z_4 +_4\}$.

समूह $G = \{Z_4 +_4\}$ में $H = \{0, 2\}$ के सभी सहसमुच्चय ज्ञात कीजिए।

4) Prove that every subgroup of an abelian group is normal.
सिद्ध कीजिए की एक आबेली समूह का प्रत्येक उपसमूह प्रसामान्य होता है।

5) Prove that the intersection of any two subrings of ring R is subring.
सिद्ध कीजिए की वलय R के किन्हीं भी दो उपवलयों का सर्वनिष्ट भी R का एक उपवलय होता है।

6) Show that the characteristic of integral domain (D,+,.) is either zero or a prime number.
सिद्ध कीजिये पूर्णांकीय प्रान्त का (D,+,.) अभिलक्षण शून्य अथवा एक अभाज्य संख्या होती है।

7) Let X be the fix element in ring R, then prove that the set $A=\{a \in R \mid ax=0\}$ is left ideal of R.
माना X, वलय R का कोई नियत अवयव है तब सिद्ध कीजिये समुच्चय $A=\{a \in R \mid ax=0\}$, R की वाम गुणजावली है।

8) Prove that the set $W=\{(a,b,c) \mid a-3b+4c=0; a,b,c \in F\}$ is subspace of vector space $V(F)=\{(a,b,c) \mid a,b,c \in F\}$.
प्रदर्शित कीजिये कि समुच्चय $W=\{(a,b,c) \mid a-3b+4c=0; a,b,c \in F\}$ सदिश समष्टि $V(F)=\{(a,b,c) \mid a,b,c \in F\}$ की एक उपसमष्टि है।

9) Show that the set $S=\{v_1=(1,0,0), v_2=(1,1,0), v_3=(1,1,1)\}$ is basis of vector space $V(R)=\{(a,b,c) \mid a,b,c \in R\}$.
प्रदर्शित कीजिये की समुच्चय $S=\{v_1=(1,0,0), v_2=(1,1,0), v_3=(1,1,1)\}$ सदिश समष्टि $V(R)=\{(a,b,c) \mid a,b,c \in R\}$ का आधार है।

Section - C **2 × 14 = 28**

(Long Answer Type Questions)

Note: Section 'C' contains Four Long Answer Type Questions. Examinees will have to answer any two (02) questions. Each question is of 14 marks. Examinees have to answer in maximum 500 words.

खण्ड – स

(दीर्घ उत्तरीय प्रश्न)

निर्देश : खण्ड 'स' में 4 निबन्धात्मक प्रश्न हैं। परीक्षार्थियों को किन्ही भी दो (02) सवालों के जवाब देना हैं। प्रत्येक प्रश्न 14 अंकों का हैं। परीक्षार्थियों को अधिकतम 500 शब्दों में प्रत्येक जवाब परिसीमित करने है।

10) (i) If $G = \left\{(a,b) \middle| a,b \in R, a \neq 0\right\}$ and operation '.' In G is defined as $(a,b).(c,d) = (ac, bc+d)$ then prove that (G,.) is a noncommutative group.

यदि $G = \left\{(a,b) \middle| a,b \in R, a \neq 0\right\}$ तथा '.' संक्रिया G में निम्न प्रकार परिभाषित है $(a,b).(c,d) = (ac, bc+d)$ तो सिद्ध कीजिए कि (G,.) एक अक्रमविनिमेय समूह है।

(ii) If H is subgroup of G and $K = \{x \in G \mid xH = Hx\}$, then prove that K is subgroup of G.

यदि H, समूह G का उपसमूह है तथा $K = \{x \in G \mid xH = Hx\}$ तो सिद्ध कीजिए की K, G का उपसमूह है।

11) If $R = \{m + n\sqrt{2};\ m, n \in Z\}$, then prove that R is commutative ring with unity with respect to usual addition and multiplication.
यदि $R = \{m + n\sqrt{2};\ m, n \in Z\}$, तब प्रदर्शित कीजिये की सामान्य योगफल तथा गुणनफल संक्रियाओं के सापेक्ष R इकाई अवयव सहित एक क्रमविनिमेय वलय है।

12) (i) If V be vector space over field F, then show that the necessary and sufficient condition for nonvoid subset W of V(F) being subspace is
यदि V क्षेत्र F पर सदिश समष्टि हो, तो सिद्ध कीजिये इसके एक अरिक्त उपसमुच्चय W के V(F) की उपसमष्टि होने के लिए आवश्यक एवं पर्याप्त प्रतिबन्ध है कि
$\forall\, u, v \in W$ and (तथा) $\forall\, a, b \in F \Longrightarrow au + bv \in W$

(ii) Show that every nonvoid subset of set of linearly independent vectors in any vector space is linearly independent.
सिद्ध कीजिये किसी सदिश समष्टि में सदिशों के एकघातत: स्वतन्त्र समुच्चय का प्रत्येक अरिक्त उपसमुच्चय भी एकघातत: स्वतन्त्र होता है।

13) Prove that any two equivalent integral domain of quotient field are equivalent.
सिद्ध कीजिये किन्ही दो तुल्याकारी पूर्णांकीय प्रान्तों के विभाग क्षेत्र भी तुल्याकारी होते हैं।
